

COME RISOLVERE LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Tutte le disequazioni di secondo grado sono riconducibili ad una di queste forme:

- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$
- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c \geq 0$

Una equazione di secondo grado è rappresentata nel piano cartesiano da una **parabola**. I termini b e c possono comparire oppure no. Se non compaiono, significa che il loro valore è zero.

NB: A destra del simbolo di disequazione, per poter applicare il metodo risolutivo, **deve** esserci 0. Se così non è, è necessario portare tutti i termini a sinistra, sommare e ricondursi ad una delle 4 forme indicate.

METODO RISOLUTIVO

1. Innanzitutto, se $a < 0$ si cambiano tutti i segni e il verso della disequazione in modo da ricondursi ad una delle quattro forme indicate (la parabola quindi ha la concavità verso l'alto).
2. Si calcolano le **soluzioni** x_1 e x_2 **dell'equazione associata** (punti in cui la parabola interseca l'asse x , con $x_1 < x_2$). L'equazione associata ha la stessa forma della disequazione e, al posto del segno di disuguaglianza compare il segno di uguaglianza.
Esempio: data la disequazione $6x^2 - 5x + 1 > 0$, l'equazione associata è $6x^2 - 5x + 1 = 0$.
3. Date le soluzioni dell'equazione, per scrivere le soluzioni della disequazione, si scelgono i valori esterni, interni o gli estremi in base a queste regole:
 - a. se si ottengono due soluzioni distinte ($x_1 \neq x_2$, con $x_1 < x_2$, in quanto $\Delta > 0$), la parabola interseca due volte l'asse x e ne sta sotto per i valori compresi tra x_1 e x_2 . Allora:
 - se nella disequazione compare il simbolo $>$, le soluzioni della disequazione sono i valori esterni a x_1 e x_2 (minore del più piccolo e maggiore del più grande).
Il risultato della disequazione è $x < x_1 \vee x > x_2$.
(Notare che x_1 e x_2 sono esclusi)
 - se nella disequazione compare il simbolo \geq , le soluzioni della disequazione sono i valori esterni, estremi inclusi.
Il risultato della disequazione è $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$.
 - se nella disequazione compare il simbolo $<$, le soluzioni della disequazione sono i valori interni a x_1 e x_2 .
Il risultato della disequazione è quindi $x_1 < x < x_2$.
(Notare che x_1 e x_2 sono esclusi)
 - se nella disequazione compare il simbolo \leq , le soluzioni della disequazione sono i valori interni a x_1 e x_2 , estremi inclusi.
Il risultato della disequazione è quindi $x_1 \leq x \leq x_2$.

b. se si ottengono due soluzioni coincidenti ($x_1 = x_2$ in quanto $\Delta = 0$), la parabola interseca in un unico punto l'asse x e ne sta sopra in tutti gli altri punti. Allora:

- se nella disequazione compare il simbolo $>$, le soluzioni della disequazione sono tutti i valori **tranne** x_1 .

Il risultato della disequazione è $\forall x \in R, x \neq x_1$.

- se nella disequazione compare il simbolo \geq , le soluzioni della disequazione sono tutti i valori. Il risultato della disequazione è $\forall x \in R$.

- se nella disequazione compare il simbolo $<$, non esistono soluzioni alla disequazione. Il risultato della disequazione è quindi $\nexists x \in R$.

- se nella disequazione compare il simbolo \leq , l'**unica** soluzione della disequazione è x_1 . Il risultato della disequazione è quindi $x = x_1$.

c. se non si ottengono soluzioni reali (e questo succede quando $\Delta < 0$), la parabola sta sempre sopra l'asse x e non lo interseca. Allora:

- se nella disequazione compare il simbolo $>$ o \geq , la disequazione è sempre soddisfatta: le soluzioni sono tutti i numeri reali. Il risultato della disequazione è $\forall x \in R$.

- se nella disequazione compare il simbolo $<$ o \leq , non esiste soluzione alla disequazione. Il risultato della disequazione è quindi $\nexists x \in R$.

Esempi

- (caso a.1) $x^2 - 2x - 8 > 0$. L'equazione associata ha come soluzioni $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Dato che compare il simbolo $>$, la soluzione della disequazione è $x < -2 \vee x > 4$.

- (caso a.2) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$. Soluz. eq. assoc.: $x_1 = -2$, $x_2 = 4 \rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 4$.

- (caso a.3) $x^2 - 5x + 6 < 0$. Soluz. eq. assoc.: $x_1 = 2$, $x_2 = 3 \rightarrow 2 < x < 3$.

- (caso a.4) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$. Soluz. eq. assoc.: $x_1 = 2$, $x_2 = 3 \rightarrow 2 \leq x \leq 3$.

- (caso b.1) $x^2 + 2x + 1 > 0$. L'equazione associata ha come unica soluzione $x_1 = -1$. Dato che compare il simbolo $>$, la soluzione della disequazione è $\forall x \in R, x \neq -1$.

- (caso b.2) $x^2 + 2x + 1 \geq 0$. Soluz. eq. assoc.: $x_1 = -1 \rightarrow \forall x \in R$.

- (caso b.3) $x^2 - 6x + 9 < 0$. Soluz. eq. assoc.: $x_1 = 3 \rightarrow \nexists x \in R$.

- (caso b.4) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$. Soluz. eq. assoc.: $x_1 = 3 \rightarrow x = 3$.

- (caso c.1) $2x^2 + x + 9 > 0$. L'equazione associata non ha soluzioni in R in quanto $\Delta < 0$. Dato che compare il simbolo $>$, la soluzione della disequazione è $\forall x \in R$.

- (caso c.2) $x^2 + 3x + 7 \leq 0$. L'equazione associata non ha soluzioni in R in quanto $\Delta < 0$. Dato che compare il simbolo \leq , la soluzione della disequazione è $\nexists x \in R$.