Università di Torino

QUADERNI
DIDATTICI
del
Dipartimento di Matematica

MARIA GARETTO

STATISTICA
Lezioni ed esercizi

Corso di Laurea in Biotecnologie
A.A. 2002/2003

Quaderno # 13 – Novembre 2002

2. *Probabilita’*

2.1 Esperimenti casuali, spazio dei campioni, eventi

Tutti conoscono l’importanza che hanno gli esperimenti nella scienza e nella tecnologia, ed il fondamentale principio secondo cui, se si esegue ripetutamente un esperimento nelle stesse condizioni, si arriva a risultati che sono essenzialmente uguali.
Ci sono tuttavia esperimenti che, nonostante siano condotti nelle medesime condizioni, possono avere diversi risultati possibili, e il cui risultato non è prevedibile con certezza: **esperimenti** di questo tipo sono detti **casuali**.
Ad esempio nel lancio di una moneta il risultato dell’esperimento può essere T (testa) o C (croce), cioè uno degli elementi dell’insieme {T,C}.
Nel lancio di un dado il risultato può essere uno dei numeri dell’insieme {1,2,3,4,5,6}.
Nell'esperimento consistente in due lanci di una moneta il risultato può essere uno degli elementi dell’insieme {TT,CC,TC,CT}.
Come si osserva dagli esempi, i possibili risultati dell'esperimento si possono esplicitare a priori, ma non si può dire con certezza quale si verificherà.
Un insieme S contenente tutti i possibili risultati di un esperimento casuale è detto **spazio campione**; ciascun risultato è un **elemento** o **punto** di S.
Gli spazi campione vengono classificati in base al numero degli elementi che essi contengono.
Lo spazio campione S corrispondente al lancio di un dado contiene 6 elementi

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

e costituisce un esempio di **spazio campione finito**.
Se si considera come evento il numero di volte che un dado deve essere lanciato prima di ottenere un 6, si ha invece uno **spazio campione infinito**: infatti ogni numero intero positivo è un possibile risultato. Il numero degli elementi in questo caso è un’infinità numerabile[1].
Se l’esperimento consiste nel misurare la lunghezza di un segmento, lo spazio S può corrispondere a tutti i punti di un intervallo della retta reale: si ha in questo caso uno **spazio campione continuo**.
Uno **spazio campione** è detto **discreto** se ha un numero finito o un’infinità numerabile di elementi.
Se gli elementi di uno spazio campione costituiscono un insieme continuo, ad esempio i punti di una retta, di una curva, di un piano, lo **spazio campione** è detto **continuo**.
Un **evento** è un sottoinsieme $E \subseteq S$ dello spazio campione S, cioè un insieme di risultati possibili.

Esempio 1
Si effettuano due lanci consecutivi di una moneta; lo spazio campione è l'insieme

$$S = \{TT,CC,TC,CT\}.$$

L’evento che si verifica quando si presenta una sola volta T è il sottoinsieme

$$E_1 = \{TC,CT\}.$$

L’evento che si verifica quando si presenta la prima volta T è

$$E_2 = \{TT,TC\}.$$

Esempio 2
Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte; descrivere lo spazio campione quando
a – i semi non sono considerati;
b – i semi sono considerati.

Si indica

1 = asso; 11 = fante; 12 = regina; 13 = re;
C = cuori; Q = quadri; P = picche; F = fiori

[1] Vedere nota pag. 4.

a – S = {1,2,....,9,10,11,12,13}
S contiene 13 elementi.

b – S = {1Q,2Q,....,10Q,11Q,12Q,13Q,1C,...,13C,1P,...,13P,1F,...,13F}
S contiene 52 elementi.

Se il risultato di un esperimento è un elemento di E, si dice che l'evento si è verificato.
Anche l'intero spazio S è un evento: l'**evento** sicuro o **certo**. Ad esempio nel lancio di un dado l'evento certo è che esca uno dei numeri {1,2,3,4,5,6}.
Anche l'insieme vuoto ∅ è un evento: l'**evento impossibile**.
Dal momento che gli eventi sono insiemi, ogni affermazione concernente gli eventi può essere tradotta nel linguaggio della teoria degli insiemi e viceversa; in particolare avremo un'**algebra degli eventi** corrispondente all'algebra degli insiemi.
Usando le **operazioni insiemistiche** sugli eventi di S si possono ottenere nuovi eventi di S.
Se A e B sono eventi di S, allora

1 – **unione**: $A \cup B$ è l'evento "A oppure B o entrambi";
2 – **intersezione**: $A \cap B$ è l'evento "sia A che B";
3 – **complementare**: $\overline{A}$ è l'evento "non A";
4 – **differenza**: A – B è l'evento "A ma non B".

Definizione 1
Due **eventi** A e B sono **mutuamente esclusivi,** o **incompatibili**, se non possono verificarsi contemporaneamente.

Se gli eventi A e B sono mutuamente esclusivi, essi sono disgiunti, ossia $A \cap B = \varnothing$.
Questi concetti si possono estendere a un numero *k* qualsiasi di eventi. Spesso si illustrano spazi campione ed eventi, in particolare le relazioni fra eventi, con i **diagrammi di Venn**.

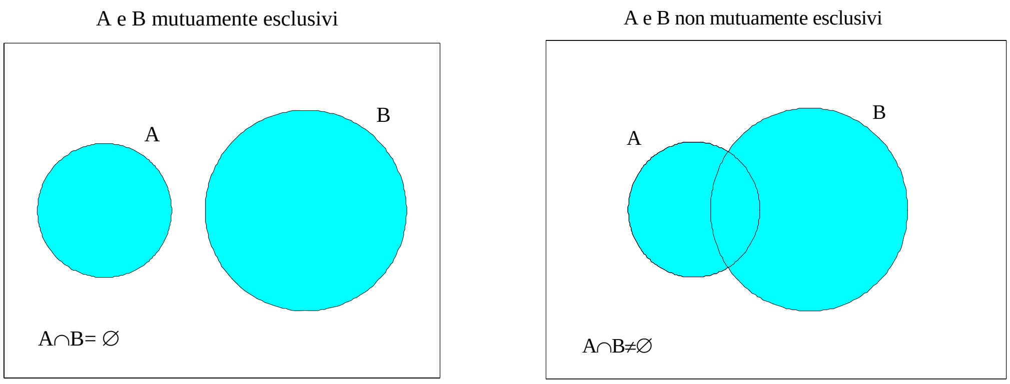


Figura 1

Ricordiamo alcune delle proprietà delle operazioni insiemistiche, valide anche nell'algebra degli eventi.

Proprietà delle operazioni insiemistiche.
Siano A, B, C sottoinsiemi dello spazio S; valgono le proprietà

1 – $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$	proprietà **commutativa** di ∪ e ∩
2– $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	proprietà **associativa** di ∪ e ∩
3 – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	proprietà **distributiva** di ∪ rispetto a ∩
4 – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	proprietà **distributiva** di ∩ rispetto a ∪
5 – $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cap B)}$	**legge di De Morgan**
6 – $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cup B)}$	**legge di De Morgan**

Esempio 3
Si effettuano due lanci di una moneta.
Spazio campione $S = \{TT,CC,TC,CT\}$.
Evento A = "si presenta almeno una T" $A = \{TT,TC,CT\}$
Evento B = "il risultato del secondo lancio è C" $B = \{CC,TC\}$

$A \cup B = \{TT,CC,TC,CT\} = S$ $\quad A \cap B = \{TC\} \neq \varnothing$

$\overline{A} = \{CC\}$ $\quad A - B = \{TT,CT\}$

Gli eventi A e B non sono mutuamente esclusivi.

Esempio 4
Si effettua un lancio di un dado.
Spazio campione $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Evento A = "uscita di un numero pari" $A = \{2,4,6\}$
Evento B = "uscita di un numero dispari" $B = \{1,3,5\}$

$A \cup B = S \ \Rightarrow\ A \cup B$ evento certo

$A \cap B = \varnothing \ \Rightarrow\ A \cap B$ evento impossibile

Gli eventi A e B sono mutuamente esclusivi.

Esempio 5
Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte; siano dati gli eventi
Evento A = "è uscito un re".
Evento B = "è uscita una carta picche".
Gli eventi sottoelencati si descrivono nel modo seguente:
a – Evento $A \cup B$ = "re o picche o entrambi (cioè re di picche)".
b – Evento $A \cap B$ = "re di picche".
c – Evento $A \cup \overline{B}$ = "re o cuori o quadri o fiori" . Infatti
Evento $\overline{B}$ = "non picche" = evento "cuori o quadri o fiori".
d – Evento $\overline{A} \cup \overline{B}$ = "non re di picche" = "ogni carta diversa dal re di picche". Infatti per la legge di De Morgan (proprietà 5 pag. 60)

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cap B)}$$

e, servendosi del risultato b, $\overline{(A \cap B)}$ = "non re di picche".
e – Evento $A - B$ = "un re, ma non di picche".

2.2 Calcolo Combinatorio

A volte può essere difficile, o almeno noioso, determinare per elencazione diretta gli elementi in uno spazio campione finito. E' preferibile avere dei metodi per contare il numero di tali elementi senza elencarli. Il **calcolo combinatorio** fornisce dei metodi per calcolare il numero di elementi di un insieme. Per illustrare il problema si consideri il seguente esempio.
Esempio 6
Se un uomo ha 3 abiti, 2 camicie e 3 cravatte, quanti modi ha per scegliere una giacca, poi una camicia e infine una cravatta?

Per trattare problemi di questo tipo è utile disegnare un **diagramma ad albero**, dove le alternative per l'abito sono indicate con A_1, A_2, A_3 , per la camicia con C_1, C_2 e per la cravatta con T_1, T_2, T_3

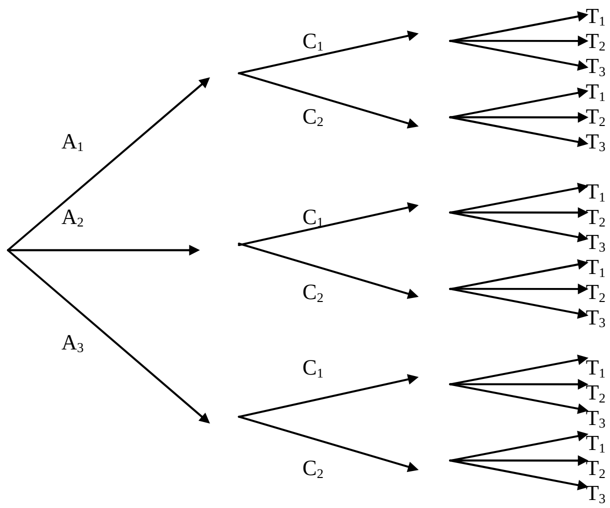


Figura 2

Seguendo un dato cammino da sinistra verso destra lungo i rami dell'albero, si ottiene una particolare scelta, cioè un elemento dello spazio campione, e si può vedere che le possibilità di scelta sono 18. Questo risultato può essere ottenuto osservando che ci sono 3 rami A, che ciascun ramo A si biforca in 2 rami C e che ciascun ramo C si biforca in 3 rami T; ci sono quindi $3\cdot2\cdot3=18$ combinazioni possibili (cammini).
Vale il seguente risultato generale

Teorema 1
Se gli insiemi $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_k$ contengono rispettivamente $n_1, n_2, ..., n_k$ oggetti, il numero di modi diversi di scegliere prima un oggetto di A_1, poi un oggetto di A_2,…, infine un oggetto di A_k è

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k \tag{2.1}$$

Esempio 7
In quanti modi diversi una commissione di 25 persone può scegliere un presidente e un vicepresidente?

Il presidente può essere scelto in 25 modi diversi, quindi il vicepresidente in 24 modi diversi; ci sono in tutto

$$N = 25 \cdot 24 = 600$$

modi diversi in cui la scelta richiesta può essere fatta.

Esempio 8
Se un test consiste di 12 domande con risposta Vero-Falso, in quanti modi diversi uno studente può svolgere l'intero test con una risposta per ciascuna domanda?

Poiché a ogni domanda si può rispondere in 2 modi, le possibilità sono in numero di

$$N = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ..... \cdot 2}_{12\text{ fattori}} = 2^{12} = 4096\,.$$

Se in particolare $n_1 = n_2 = ... = n_k = n$, si ha $N = n^k$, che rappresenta il numero delle disposizioni con ripetizione di *n* oggetti a gruppi di *k*, ossia dei gruppi che si possono formare scegliendo *k* oggetti, anche ripetibili, fra *n* oggetti disponibili.

Teorema 2
Il numero di **disposizioni con ripetizione di *n* oggetti a gruppi di *k*** è dato da

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k \tag{2.2}$$

Esempio 9
Quante parole di 3 lettere (anche senza significato) si possono scrivere con l'alfabeto di 21 lettere?

Le parole sono

aaa, aab, aac, ….. , zzz

Il loro numero è

$$\mathrm{D}_{21,3}^{(r)} = 21^3 = 9261$$

Esempio 10
Nella schedina del totocalcio tutti i possibili pronostici sono dati dalle disposizioni con ripetizione dei 3 elementi 1 2 X a gruppi di 13 (i tre simboli si possono ripetere); il loro numero è

$$\mathrm{D}_{3,13}^{(r)} = 3^{13} = 1594323$$

Definizione 2
Dati n oggetti distinti, si chiamano **disposizioni semplici (senza ripetizione)** i gruppi che si possono formare scegliendo k ($k \le n$) degli n oggetti; i gruppi devono differire o per qualche oggetto o per l'ordine in cui sono disposti.

Per trovare una formula per il numero delle disposizioni di k oggetti scelti da un insieme di n oggetti distinti, si osservi che la prima scelta è fatta dall'intero insieme di n oggetti, la seconda è fatta fra gli $n - 1$ oggetti rimanenti dopo la prima scelta, in generale la k-esima scelta è fatta fra gli $n - (k - 1) = n - k + 1$ oggetti rimanenti dopo le prime $k - 1$ scelte.
Pertanto, per il teorema 1, il numero delle disposizioni è

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)....(n-k+1) \tag{2.3}$$

Si può usare la notazione del fattoriale $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.
Moltiplicando e dividendo nella (2.3) per $(n - k)!$ si ottiene

$$D_{n,k} = \frac{n(n-1)....(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Pertanto vale il risultato seguente

Teorema 3
Il numero delle **disposizioni semplici (senza ripetizione)** di k oggetti scelti da un insieme di n oggetti distinti è dato da

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)....(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2.4}$$

Esempio 11
Quante parole di 3 lettere diverse si possono formare con l'alfabeto di 21 lettere?

Sono le disposizioni semplici di 21 oggetti diversi a gruppi di 3

$$D_{21,3} = \frac{21!}{18!} = 19 \cdot 20 \cdot 21 = 7980 \ .$$

Esempio 12
In quanti modi 10 persone possono sedersi su una panchina che ha solo 4 posti?

Il numero dei modi è dato dalle disposizioni semplici di 10 elementi a gruppi di 4

$$D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

Esempio 13
In una gara con 40 concorrenti, quante sono le possibili classifiche dei primi tre?

Per il 1° posto possiamo scegliere tra 40 possibilità; per il 2° posto possiamo scegliere fra 39 possibilità e per il 3° posto fra 38 possibilità. In tutto quindi le classifiche possibili per i primi tre sono

$$D_{40,3} = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280$$

Esempio 14
Trovare quanti numeri di 4 cifre possono essere formati con le 10 cifre 0, 1, 2, ..., 9 se
a – si ammettono delle ripetizioni;
b – non si ammettono ripetizioni;
c – l'ultima cifra deve essere 0 e non si ammettono ripetizioni.

a – la prima cifra può essere una delle 9 cifre 1, 2, ...,9 (lo 0 non è ammesso); le altre tre cifre si scelgono fra le 10 disponibili; si possono allora formare N numeri

$$N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000 \,.$$

b – la prima cifra può essere una delle 9 cifre 1, 2, ..., 9; per le restanti si devono contare le disposizioni senza ripetizioni

$$D_{9,3} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 \,;$$

si possono allora formare N numeri

$$N = 9 \cdot 504 = 4536 \,.$$

c – la prima cifra può essere una delle 9 cifre 1, 2, ..., 9; per la seconda e la terza si devono contare le disposizioni senza ripetizioni

$$D_{8,2} = \frac{8!}{6!} = 7 \cdot 8 = 56$$

(ricordare che la quarta cifra è fissata); si possono quindi formare N numeri

$$N = 9 \cdot 56 = 504 \,.$$

Nel caso particolare in cui $k = n$ le disposizioni semplici si chiamano permutazioni.

Definizione 3
Le **permutazioni** di n oggetti distinti sono tutti i gruppi formati ciascuno da tutti gli n oggetti dati e che differiscono solo per l'ordine degli oggetti.

Ponendo $k = n$ nella formula delle disposizioni semplici si ottiene il seguente risultato.

Teorema 4
Il numero delle **permutazioni di *n* oggetti distinti** è dato da

$$P_n = n! \tag{2.5}$$

Esempio 15
Quante parole si possono formare con le 5 vocali?

Il numero delle parole è dato dalle permutazioni di 5 elementi

$$P_5 = 5! = 120.$$

Esempio 16
Si sistemano in uno scaffale 4 libri di matematica, 6 di fisica e 2 di chimica. Contare quante sistemazioni sono possibili se
a – i libri di ogni materia devono stare insieme;
b – solo i libri di matematica devono stare insieme.

a – Numero sistemazioni dei libri di matematica = 4!
Numero sistemazioni dei libri di fisica = 6!
Numero sistemazioni dei libri di chimica = 2!
Numero sistemazioni dei tre gruppi diversi = 3!
Il numero complessivo delle sistemazioni dei libri è quindi

$$N = 4! \cdot 6! \cdot 2! \cdot 3! = 207360$$

b – Si considerano i libri di matematica come un'unica opera.
Restano allora 8 libri (fisica+chimica) + 1 libro (matematica) = 9 libri da sistemare in 9! modi diversi. I libri di matematica hanno 4! sistemazioni diverse, quindi il numero complessivo di sistemazioni diverse è

$$N = 9! \cdot 4! = 8709120$$

Esempio 17
Si fanno sedere 5 uomini e 4 donne in fila: in quanti modi le donne possono occupare i posti pari?

Gli uomini possono essere sistemati in 5! modi diversi (permutazioni), le donne in 4! modi diversi.
Ciascuna sistemazione degli uomini può essere associata ad ogni sistemazione delle donne, quindi il numero complessivo di sistemazioni è

$$N = 5! \cdot 4! = 2880 .$$

Esempio 18
Gli **anagrammi**, cioè le parole che si ottengono da una parola qualunque cambiando solo il posto delle sue lettere, sono permutazioni.
Consideriamo dapprima il caso in cui le parole sono formate da lettere tutte diverse: ad esempio gli anagrammi della parola ROMA sono

$$P_4 = 4\,! = 24$$

Per risolvere il problema degli anagrammi nel caso in cui la parola contenga lettere uguali, occorre disporre di un'altra formula. Supponiamo che un insieme sia formato da *n* oggetti non tutti distinti, dei quali cioè n_1 sono di un tipo (indistinguibili), n_2 di un secondo tipo, ..., n_k del *k*-esimo tipo, con $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.
Si dimostra che

Teorema 5
Il numero delle **permutazioni di *n* oggetti non tutti distinti** è dato da

$$P_{n,n_1,...,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} \tag{2.6}$$

Esempio 19
Contare gli anagrammi della parola MATEMATICA.

Ci sono 10 lettere di cui 2 M, 3 A, 2 T; gli anagrammi sono in numero di

$$N = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151200 .$$

Esempio 20
5 palline rosse, 2 bianche e 3 azzurre devono essere sistemate in fila; se tutte le palline dello stesso colore sono indistinguibili, quante sistemazioni sono possibili?

Il numero delle possibili sistemazioni è

$$N = \frac{10!}{5!\cdot 2!\cdot 3!} = 2520 .$$

In una disposizione semplice siamo interessati all'ordine degli oggetti, quindi ad esempio il gruppo "abc" è un gruppo diverso da "bca"; se invece l'ordine di scelta non interessa, cioè "abc" e "bca" sono lo stesso gruppo, si ottengono le **combinazioni**.

Definizione 4
Le **combinazioni** sono tutti i gruppi di *k* oggetti, che si possono formare da un insieme di *n* oggetti distinti, in modo che i gruppi differiscano per almeno un oggetto.

Teorema 6
Il numero delle **combinazioni** di *n* oggetti a gruppi di *k* è dato da

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.7}$$

I numeri

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

sono chiamati **coefficienti binomiali**, perché compaiono nello sviluppo della potenza del binomio di Newton $(a+b)^n$.

Esempio 21
Quante squadre di calcio si possono formare con 30 giocatori?

Il numero è dato dalle combinazioni di 11 giocatori scelti nell'insieme di 30

$$C_{30,11} = \binom{30}{11} = \frac{30!}{11!\cdot 19!} = 54627300$$

Esempio 22
In quanti modi 10 oggetti diversi possono essere suddivisi in due gruppi contenenti rispettivamente 4 e 6 oggetti?

Il problema è equivalente a quello di cercare il numero delle scelte di 4 oggetti a partire da 10 (o di 6 a partire da 10), non avendo alcuna importanza l'ordine della scelta; si calcolano perciò le combinazioni

$$C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = 210$$

Esempio 23
Gioco del poker.
In una mano di poker ogni giocatore riceve 5 delle 52 carte del mazzo. In quanti modi può essere servito?

Il numero dei servizi possibili è dato dalle combinazioni di 5 oggetti scelti fra 52

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 2598960$$

Gioco del bridge
In una mano di bridge si ricevono 13 carte su 52. In quanti modi il giocatore può essere servito?

Il numero dei servizi possibili è

$$C_{52,13} = \binom{52}{13} = \frac{52!}{13!\cdot 39!} = 635013559600$$

Esempio 24
Gioco del lotto
Nel gioco del lotto vengono estratti, senza rimetterli ogni volta nell'urna, 5 numeri compresi fra 1 e 90. Le estrazioni avvengono su 10 città o "ruote" diverse, e bisogna precisare su quale ruota si gioca.
a – Trovare il numero di tutte le possibili cinquine relative ad ognuna delle ruote.
b – Quante sono le possibili estrazioni che ci fanno vincere se abbiamo giocato ad esempio l'ambo $\{13\ ,\ 48\}$ su una certa ruota?

a – Il numero di tutte le possibili cinquine è dato dalle combinazioni

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268$$

b – Cerchiamo il numero di cinquine che contengono 13 e 48: gli altri numeri estraibili sono i numeri da 1 a 12, da 14 a 47, da 49 a 90, in tutto 88 numeri; calcoliamo le combinazioni di 88 numeri a gruppi di 3

$$C_{88,3} = \binom{88}{3} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 109736\,.$$

Esempio 25
Contare quante sono le diagonali di un poligono convesso.
Un poligono di n lati ha n vertici; ci sono $\binom{n}{2}$ segmenti che uniscono tali vertici; n di questi sono i lati del poligono, perciò il numero delle diagonali è

$$N = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}\,.$$

Esempio 26
Quante parole (anche senza significato) di 3 diverse consonanti e 2 diverse vocali si possono formare con l'alfabeto di 21 lettere?
I modi di scegliere le 3 consonanti fra le 16 disponibili sono $\binom{16}{3}$.
I modi di scegliere le 2 vocali fra le 5 disponibili sono $\binom{5}{2}$.
Le 5 lettere risultanti possono essere permutate in 5! modi diversi; allora il numero delle parole possibili è

$$N = \binom{16}{3}\binom{5}{2} \cdot 5! = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 5! = 672000$$

2.3 Il concetto di probabilità

Con i metodi del calcolo combinatorio si possono contare gli elementi di un insieme, in altre parole possiamo calcolare quanti sono i casi possibili in una data situazione. In ogni esperimento casuale però non sappiamo se un evento si presenterà o no: bisogna quindi studiare ciò che è probabile o improbabile.
La teoria della probabilità studia concetti e metodi per esprimere quantitativamente il grado di fiducia sul verificarsi di certi eventi. A ciascun evento può essere associata una probabilità, che, dal punto di vista matematico, è una funzione definita sull'insieme degli eventi.

Ci sono più modi mediante i quali è possibile definire la probabilità di un evento: qui definiremo la **probabilità a priori** o **probabilità matematica** e la **probabilità a posteriori** o **probabilità statistica** (o **frequentistica**); è possibile dare un'ulteriore definizione di probabilità, detta **probabilità soggettiva**, che non sarà trattata in queste lezioni.
La definizione classica di **probabilità matematica** *P*, dovuta a Bernoulli e Laplace, è

$$P = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$$

Questa definizione assume che tutti i risultati possibili di un esperimento siano ugualmente probabili e che lo spazio dei campioni sia finito.
La misura della probabilità viene perciò assegnata con il seguente procedimento
1 – si determina il numero di tutti i casi possibili;
2 – si determina il numero dei casi favorevoli, cioè di quei casi che rendono verificato l'evento di cui si vuole calcolare la probabilità;
3 – si calcola il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.
Secondo questa definizione, ogni probabilità P è un numero compreso fra 0 e 1; inoltre la probabilità di un evento che non può accadere (**evento impossibile**) è $P = 0$ e la probabilità di un evento che accade sempre (**evento certo**) è $P = 1$.
Talvolta la probabilità P viene moltiplicata per 100 ed espressa in percentuale

$$0\ \% \leq P \leq 100\ \%.$$

I seguenti esempi illustrano la definizione di probabilità a priori; in alcuni di essi, contrassegnati con un asterisco, si applicano i metodi del calcolo combinatorio.

Esempio 27
Si effettua un lancio di un dado. Calcolare
a – la probabilità di ottenere 2;
b – la probabilità di ottenere un numero dispari.

I casi possibili sono 6 e sono gli elementi dell'insieme {1,2,3,4,5,6}.
a – I casi favorevoli si riducono a 1 (i casi possibili si escludono a vicenda perché può apparire una sola faccia). Pertanto la probabilità cercata è $P = \frac{1}{6}$.
b – I casi favorevoli sono 3. La probabilità cercata è $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Esempio 28
Si effettuano due lanci di una moneta. Calcolare la probabilità che si presenti T (testa) almeno una volta.

Casi possibili	TT	TC	CT	CC
Casi favorevoli	TT	TC	CT	

La probabilità cercata è $P = \frac{3}{4}$.

Esempio 29
Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. Calcolare
a – la probabilità di estrarre un asso;
b – la probabilità di estrarre un asso oppure un 10 di cuori oppure un 2 di picche.

a – Nel mazzo ci sono 4 assi, quindi 4 casi favorevoli; la probabilità cercata è $P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
b – Nel mazzo ci sono 4 assi, un 10 di cuori e un 2 di picche, quindi 6 casi favorevoli; la probabilità cercata è $P = \frac{6}{52}$.

*** *Esempio 30***

Intorno a un tavolo rotondo si dispongono a caso 5 uomini e 5 donne: calcolare la probabilità che ogni donna si trovi seduta tra due uomini.

Le 10 persone possono disporsi in $10!$ modi diversi (casi possibili).
Le donne possono disporsi in $5!$ modi diversi (permutazioni); così anche gli uomini, quindi i casi favorevoli sono $5! \cdot 5!$
La probabilità richiesta vale

$$P = \frac{5! \cdot 5!}{10!} = 0.00397 .$$

*** *Esempio 31***

Se su un gruppo di 20 pneumatici, 3 sono difettosi, e si scelgono 4 pneumatici a caso per un controllo di qualità, qual è la probabilità che uno solo di quelli difettosi sia incluso nel gruppo scelto?

I casi possibili sono le combinazioni di 20 oggetti a gruppi di 4; ci sono cioè

$$C_{20,4} = \binom{20}{4} = 4845$$

modi ugualmente probabili di scegliere 4 pneumatici su 20.
Il numero di casi favorevoli è il numero di modi in cui si possono scegliere 3 pneumatici non difettosi e 1 difettoso, cioè

$$C_{17,3} \cdot C_{3,1} = \binom{17}{3} \cdot \binom{3}{1} = 2040$$

Quindi la probabilità è

$$P = \frac{2040}{4845} = \frac{8}{19} \cong 0.42 = 42\%$$

*** *Esempio 32***

Determinare la probabilità che, in 4 lanci successivi di un dado, i risultati compaiano in ordine strettamente crescente.

I casi possibili sono le disposizioni con ripetizione di 6 oggetti a gruppi di 4

$$D_{6,4}^{(r)} = 6^4 = 1296$$

I casi favorevoli si hanno quando i risultati dei 4 lanci sono distinti e in ordine crescente.
Il numero di tali casi è dato dal numero delle combinazioni di 6 oggetti a gruppi di 4, perché come gruppo rappresentativo si può scegliere quello in cui i 4 numeri sono disposti in ordine crescente

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

La probabilità cercata è

$$P = \frac{15}{1296} \cong 0.0115$$

*** *Esempio 33***

Da un’urna contenente 30 palline, 18 nere e 12 rosse vengono estratte a caso 10 palline.
Determinare la probabilità che 7 fra le palline estratte siano nere.

I casi possibili sono le combinazioni di 30 palline a gruppi di 10

$$C_{30,10} = \binom{30}{10} = 30045015.$$

I casi favorevoli si hanno quando in un gruppo ci sono 7 palline nere e 3 rosse.
Il numero di gruppi di 7 palline nere che si possono formare con 18 palline nere è dato dalle combinazioni

$$C_{18,7} = \binom{18}{7} = 31824.$$

Il numero dei gruppi di 3 palline rosse che si possono formare con 12 palline rosse è dato dalle combinazioni

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} = 220.$$

In totale i casi favorevoli sono

$$C_{18,7} \cdot C_{12,3} = \binom{18}{7} \cdot \binom{12}{3} = 7001280.$$

La probabilità cercata è

$$P = \frac{7001280}{30045015} \cong 0.233$$

**** Esempio 34***

Si estraggono 8 palline da un'urna contenente 20 palline numerate da 1 a 20.
Determinare la probabilità che il numero più basso estratto sia 5.
I casi possibili sono le combinazioni di 20 palline a gruppi di 8

$$C_{20,8} = \binom{20}{8} = 125970$$

Se la pallina numerata 5 è la più bassa fra le 8 estratte, allora le rimanenti 7 devono essere numerate da 6 a 20; per trovare i casi favorevoli calcoliamo le combinazioni di 15 elementi a gruppi di 7

$$C_{15,7} = \binom{15}{7} = 6435.$$

La probabilità cercata è

$$P = \frac{6435}{125970} \cong 0.051.$$

Ci sono molti casi in cui i vari risultati possibili di un esperimento non sono tutti ugualmente probabili. In tal caso si può definire la probabilità per mezzo di una stima frequentistica, possibile solo dopo aver esaminato un gran numero di casi. Si definisce in questo modo la **probabilità a posteriori**, detta anche **probabilità statistica** o **frequentistica.**
Se, dopo aver ripetuto n volte un esperimento, con n sufficientemente grande, un evento si è verificato h volte, si dice che la probabilità di questo evento è $P = \frac{h}{n}$.
Affinché questa definizione sia valida, occorre che tutte le prove avvengano nelle stesse condizioni, cosa che in realtà non è sempre ottenibile quando si analizzano fenomeni statistici.
Se si afferma ad esempio che la probabilità di una nascita di gemelli è $P = \frac{1}{100}$, si intende che la frequenza relativa osservata nell'arco di alcuni anni è stata di 1 su 100; da tale constatazione si può assumere che una nascita futura sarà una nascita di gemelli con probabilità P uguale a tale frequenza.

Esempio 35

Si è verificato che su 100 lanci successivi di una moneta, T (testa) si è presentata 56 volte; qual è la probabilità che nel prossimo lancio si presenti C (croce)?

Se T si è presentata 56 volte su 100, allora C si è presentata 44 volte su 100 e la probabilità cercata è uguale alla frequenza relativa osservata

$$P = \frac{44}{100} = 0.44\,.$$

Esempio 36
Si è osservata la durata di un campione di 800 batterie per automobili, ottenendo i dati riportati nella tabella (x indica la durata in anni)

durata	$x < 1$	$1 \le x < 1.5$	$1.5 \le x < 2$	$2 \le x < 2.5$	$2.5 \le x < 3$	$x \ge 3$
numero batterie	61	84	142	247	172	94

Tabella 1

Per una batteria dello stesso tipo e marca si vuole stimare la probabilità relativa a ciascuno dei seguenti eventi
a – Evento A = “la batteria dura almeno tre anni”;
b – Evento B = “la batteria dura meno di un anno”;
c – Evento C = “la batteria dura almeno due anni”.

Se si considera sufficientemente grande il numero di batterie osservate, si può utilizzare il criterio della stima frequentistica della probabilità. Si ottiene così

a – $$P(\mathrm{A}) = \frac{94}{800} = 0.1175 = 11.75\%$$

b – $$P(\mathrm{B}) = \frac{61}{800} = 0.07625 = 7.625\%$$

c – Per calcolare la probabilità dell'evento C occorre considerare il numero delle batterie la cui durata è stata almeno uguale a due anni: 247+172+94 = 513; si ha quindi

$$P(\mathrm{C}) = \frac{513}{800} = 0.6412 = 64.125\%$$

Sia l’approccio classico, sia quello statistico o frequentistico vanno incontro a difficoltà: il primo a causa dell’espressione “ugualmente probabile”, il secondo per aver presupposto “n molto grande”, concetti di palese vaghezza. A causa di queste difficoltà, si preferisce l’approccio assiomatico alla probabilità, che fa uso degli insiemi.

2.4 Definizione assiomatica di probabilità

Sia S uno spazio campione finito. Ad ogni evento A di S si associa un numero reale P(A), detto **probabilità dell’evento A**, che soddisfa i seguenti assiomi
1 – $0 \le P(\mathrm{A}) \le 1$
2 – $P(\mathrm{S}) = 1$
3 – Se A e B sono eventi mutuamente esclusivi di S (cioè $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$), allora

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}).$$

P è una funzione definita sull’insieme degli eventi di S e a valori reali, detta **funzione di probabilità**, che a ogni sottoinsieme A di S associa un numero reale

$$P : \mathrm{A} \subseteq \mathrm{S} \to P(\mathrm{A}) \in \mathbf{R}\,.$$

Dal 1° assioma segue che P(A) è un numero reale appartenente all’intervallo [0,1]; dal 2° assioma segue che la probabilità dell’evento certo è 1; dal 3° assioma segue che le funzioni di probabilità sono funzioni additive.
Gli assiomi non devono naturalmente essere dimostrati, ma si può mostrare che essi sono coerenti con la definizione classica di probabilità.

Esempio 37
Un esperimento ha tre soli possibili risultati *a*, *b*, e *c*; in ciascuno dei casi seguenti verificare se i valori assegnati alle probabilità sono accettabili

1 – $P(a) = \frac{1}{3}$, $P(b) = \frac{1}{3}$, $P(c) = \frac{1}{3}$

2 – $P(a) = 0.64$, $P(b) = 0.38$, $P(c) = -0.02$

3 – $P(a) = 0.35$, $P(b) = 0.52$, $P(c) = 0.26$

1 – I valori assegnati alle probabilità sono accettabili, perché sono compresi nell'intervallo [0,1] e la loro somma vale 1.
2 – Il valore di $P(c) = -0.02$ non è accettabile perché negativo.
3 – I valori non sono accettabili perché la loro somma è $0.35+0.52+0.26 = 1.13 > 1$.

Elenchiamo alcuni **teoremi elementari** che seguono dagli assiomi appena enunciati.
Il teorema 7 è una generalizzazione del terzo assioma.

Teorema 7
Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono eventi mutuamente esclusivi di uno spazio campione S, allora

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \qquad (2.8)$$

Il teorema 8 consente di calcolare la probabilità dell'unione di due eventi qualsiasi, anche nel caso in cui gli eventi non sono necessariamente mutuamente esclusivi.

Teorema 8 – Regola additiva
Se A e B sono due eventi qualsiasi di S, allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (2.9)$$

Di questo teorema si può dare una semplice rappresentazione grafica con i diagrammi di Venn.

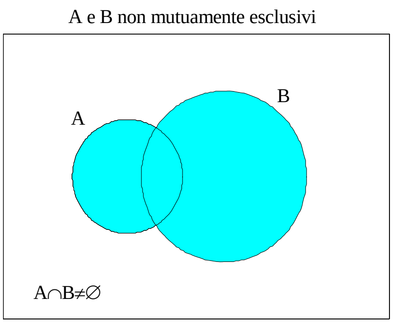


Figura 3

Dal grafico si vede che, sommando semplicemente $P(A)$ e $P(B)$, la probabilità $P(A \cap B)$ viene contata due volte. Se gli eventi sono mutuamente esclusivi, il teorema 8 si riduce al terzo assioma della definizione.

Teorema 9
Se A è un qualunque evento di S, allora

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (2.10)$$

In particolare l'evento impossibile ha probabilità nulla

$$P(\emptyset) = 0.$$

Esempio 38
Siano A e B due eventi mutuamente esclusivi, con $P(A) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.6$. Calcolare $P(B)$.

Poiché gli eventi sono mutuamente esclusivi, si ha

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

quindi

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.6 - 0.5 = 0.1$$

Esempio 39
Una pallina viene estratta da un'urna che ne contiene 6 rosse, 4 bianche e 5 nere. Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia
a – rossa;
b – bianca;
c – nera;
d – non rossa;
e – rossa o bianca.

a – Casi possibili: 6 + 4 + 5 = 15 Casi favorevoli: 6

$$P(\text{rossa}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

b – $P(\text{bianca}) = \frac{4}{15}$

c – $P(\text{nera}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

d – $P(\text{non rossa}) = 1 - P(\text{rossa}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

e – $P(\text{rossa} \cup \text{bianca}) = P(\text{rossa}) + P(\text{bianca}) = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

(rossa e bianca sono eventi mutuamente esclusivi)

Esempio 40
Trovare la probabilità di non ottenere come somma del lancio di due dadi né 7 né 11.

Lo spazio campione S è costituito da 36 coppie di numeri, che rappresentano le possibili uscite su ciascuno dei due dadi

$$S = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}$$

I punti del grafico che segue rappresentano l'insieme S

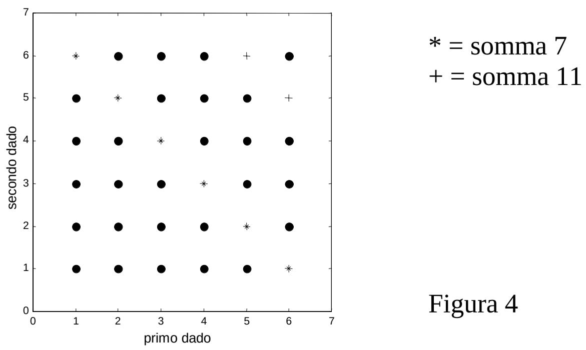


Figura 4

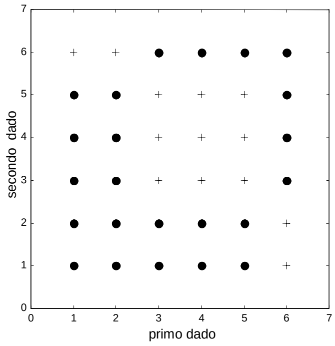
Evento A = " somma uguale a 7 oppure a 11"
Evento $\overline{A}$ = " somma né 7 né 11"

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{36} = \frac{7}{9}$$

Esempio 41
Due dadi hanno le facce numerate nel modo seguente

1 1 2 2 2 3

Trovare la probabilità che il punteggio totale sia
a – uguale a 4;
b – minore di 4;
c – maggiore di 4.



+ = somma 4

Figura 5

a – Casi possibili: 36. Casi favorevoli: 13.

La probabilità che il punteggio totale sia uguale a 4 è $P = \frac{13}{36}$.

b – Casi possibili: 36. Casi favorevoli: 16.

La probabilità che il punteggio totale sia minore di 4 è $P = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

c – La probabilità che il punteggio totale sia minore o uguale a 4 è $P = \frac{13}{36} + \frac{4}{9} = \frac{29}{36}$, quindi la probabilità che il punteggio sia maggiore di 4 è $P = 1 - \frac{29}{36} = \frac{7}{36}$.

Esempio 42
Si effettua il lancio di un dado. Calcolare
a – la probabilità che esca un 2 oppure un 5;
b – la probabilità che esca un numero pari;
c – la probabilità che esca un numero divisibile per 3.
d – Dati gli eventi
Evento A_1 = "esce 1 oppure 2" $A_1 = \{1,2\}$
Evento A_2 = "esce 2 oppure 3" $A_2 = \{2,3\}$
calcolare $P(A_1 \cup A_2)$.

a – Si ha

$$P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$$

L'evento che si verifica quando esce un 2 o un 5 si indica con $2 \cup 5$

$$P(2 \cup 5) = P(2) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

b – $$P(2 \cup 4 \cup 6) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{2}$$

c – $$P(3 \cup 6) = P(3) + P(6) = \frac{1}{3}$$

d – Gli eventi $A_1 = \{1,2\}$ e $A_2 = \{2,3\}$ non sono mutuamente esclusivi, poiché

$$A_1 \cap A_2 = \{2\} \neq \emptyset .$$

Si ha

$$A_1 \cup A_2 = \{1,2,3\}$$

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} .$$

Esempio 43

Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte. Calcolare la probabilità che sia

a – un asso;
b – un fante di cuori;
c – un 3 di picche o un 6 di fiori;
d – un cuori;
e – un seme diverso da cuori;
f – un 10 o un quadri;
g – né un 4 né un picche.

Si usano le notazioni

1 = asso, ... , 11 = fante, 12 = regina, 13 = re,
C = cuori, Q = quadri, P = picche, F = fiori.

a – $$P(1) = \frac{4}{52}$$

b – $$P(11 \cap C) = \frac{1}{52}$$

c – $$P((13 \cap P) \cup (6 \cap F)) = P(13 \cap P) + P(6 \cap F) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{1}{26}$$

d – $$P(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

e – $$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

f – 10 e quadri non sono mutuamente esclusivi, quindi

$$P(10 \cup Q) = P(10) + P(Q) - P(10 \cap Q) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

g – $$P(\text{né 4 né picche}) = P(\overline{4} \cap \overline{P})$$

Per la legge di De Morgan (proprietà 6, pag. 60) si ha

$$P(\overline{4} \cap \overline{P}) = P(\overline{(4 \cup P)}) = 1 - P(4 \cup P) =$$

$$= 1 - [P(4) + P(P) - P(4 \cap P)] = 1 - \left[\frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52}\right] = \frac{9}{13}$$

(si ricordi che gli eventi 4 e P non sono mutuamente esclusivi).

Esempio 44

Supponiamo che i pezzi prodotti da una certa macchina possano avere due tipi di difetti. E' noto che la probabilità che un pezzo presenti il primo difetto è 0.1, la probabilità che non presenti il secondo difetto è 0.8, la probabilità che li presenti entrambi è 0.01.
Calcolare la probabilità che un pezzo non abbia alcun difetto.
Evento A = "è presente il primo difetto"
Evento B = "è presente il secondo difetto".

Dai dati del problema si ha

$$P(\text{A}) = 0.1 \qquad P(\overline{\text{B}}) = 0.8 \qquad P(\text{A} \cap \text{B}) = 0.01$$

Si deve calcolare $P(\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}})$.

$$P(\overline{\text{A}}) = 0.9 \qquad P(\text{B}) = 0.2$$

Applicando la regola additiva (teorema 8) si ha

$$P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B}) = 0.1 + 0.2 - 0.01 = 0.29$$

Per la legge di De Morgan (proprietà 6, pag. 560) si ha

$$P(\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}}) = \text{P}(\overline{\text{A} \cup \text{B}}) = 1 - P(\text{A} \cup \text{B}) = 1 - 0.29 = 0.71 .$$

Esempio 45
Se in una stanza sono presenti n persone qual è la probabilità che nessuna di esse festeggi il compleanno nello stesso giorno dell'anno?

Evento A = " tutti compiono gli anni in giorni diversi".
Per calcolare i casi possibili osserviamo che ogni persona può compiere gli anni in uno qualsiasi dei 365 giorni dell'anno (non consideriamo il caso particolare degli anni bisestili), perciò per n persone si hanno complessivamente 365^n casi possibili.
I casi favorevoli si hanno quando tutti compiono gli anni in giorni diversi; la prima persona ha 365 possibilità, la seconda persona 364 possibilità, …, l'n-esima persona ha 365–(n–1) possibilità; complessivamente i casi favorevoli sono

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - (n-1)).$$

Si ha quindi

$$P(\text{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - (n-1))}{365^n}.$$

Nella tabella seguente riportiamo i valori della probabilità per vari valori di n

n	10	20	23	30	40	50	60	70	80
P(A)	0.8831	0.5886	0.4927	0.2937	0.1088	0.0296	0.0059	0.0008	0.000085

Tabella 2

Dalla tabella si vede che se n = 23 la probabilità è minore di 0.5; questo significa che se nella stanza ci sono 23 persone, la probabilità che almeno due di esse compiano gli anni nello stesso giorno è maggiore di 0.5; questa probabilità diventa 0.9704 se nella stanza ci sono 50 persone. Questi risultati possono apparire abbastanza sorprendenti.

2.5 Probabilità condizionata

La probabilità di un evento è un numero che misura il grado di fiducia che noi abbiamo circa il realizzarsi di questo evento. E' naturale allora che la probabilità di uno stesso evento possa cambiare, se cambiano le informazioni in nostro possesso.
Il concetto di probabilità condizionata traduce formalmente l'idea intuitiva di probabilità di un evento, calcolata sapendo che si è verificato un altro evento.

Esempio 46
Si effettua un lancio di un dado; consideriamo i seguenti eventi
Evento A = "esce un numero dispari" A = {1,3,5}
Evento B = "esce un numero minore di 4" B = {1,2,3}.
Calcoliamo la probabilità di ottenere un numero minore di 4, sapendo che il risultato è un numero dispari.

La probabilità dell'evento A vale

$$P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$$

poiché i casi possibili sono 6 e i casi favorevoli sono 3. Analogamente per l'evento B

$$P(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}$$

Se sappiamo che l'evento A si è già verificato, i casi possibili per l'evento B non sono più 6, ma si riducono a 3 (ossia la conoscenza del verificarsi dell'evento A riduce lo spazio campione), e i casi favorevoli sono 2, perciò la probabilità di ottenere un numero minore di 4, sapendo che il risultato è dispari, è $\frac{2}{3}$.

La probabilità così ottenuta è detta **probabilità condizionata**

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{2}{3}$$

(il simbolo | si legge "a condizione che").

Il fatto di aggiungere l'informazione che il numero estratto è dispari, fa aumentare la probabilità di B da $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$.

Osserviamo che si ha

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1,3\} \qquad P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

e che

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} = \frac{2}{3}$$

Queste considerazioni vengono formalizzate dalla seguente definizione.

Definizione 5

Siano A e B due eventi qualsiasi dello spazio campione S e sia $P(\mathrm{A}) \neq 0$.

La probabilità dell'evento B, nell'ipotesi che si sia già verificato l'evento A, è chiamata **probabilità** di B **condizionata** ad A ed è definita da

$$P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} \tag{2.11}$$

Analogamente, se $P(\mathrm{B}) \neq 0$, la probabilità di A condizionata a B è definita da

$$P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} \tag{2.12}$$

Il seguente risultato è una conseguenza immediata della definizione di probabilità condizionata.

Teorema 10 – Regola di moltiplicazione

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) \qquad \text{se } P(\mathrm{A}) \neq 0 \tag{2.13}$$

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) \qquad \text{se } P(\mathrm{B}) \neq 0 \tag{2.14}$$

Questo significa che la probabilità del verificarsi di entrambi gli eventi A e B è uguale alla probabilità di A per la probabilità che B si verifichi, quando si supponga che A si sia già verificato.

Esempio 47

Data un'urna contenente 15 palline rosse e 5 palline nere, indichiamo con A l'evento "estrazione di pallina rossa" e con B l'evento "estrazione di pallina nera". Calcoliamo la probabilità di ottenere in due estrazioni consecutive prima una pallina rossa e poi una nera, nell'ipotesi che la prima pallina estratta non venga rimessa nell'urna.

La probabilità di estrarre una pallina rossa alla prima estrazione è

$$P(\mathrm{A}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

La probabilità di estrarre una pallina nera dopo aver già estratto una pallina rossa, che non viene rimessa nell'urna prima di effettuare la seconda estrazione, è $\frac{5}{19}$. Infatti ci sono soltanto più 19 palline nell'urna fra le quali estrarre la seconda. Pertanto la probabilità condizionata vale

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{5}{19}$$

La probabilità $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ di ottenere in due estrazioni consecutive una pallina rossa e poi una nera, senza rimettere nell'urna la rossa già estratta, in base alla (2.13) è

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{19} = \frac{15}{76} = 0.1974\,.$$

Se invece la prima pallina estratta venisse rimessa nell'urna, la probabilità di ottenere in due estrazioni consecutive prima una pallina rossa e poi una nera sarebbe

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{20} = \frac{3}{16} = 0.1875\,.$$

Esempio 48

Qual è la probabilità che, lanciando una moneta 5 volte, non esca mai “croce”?
Qual è la probabilità dello stesso evento, supponendo di aver già lanciato la moneta 4 volte e di aver ottenuto sempre “testa”?

a – Sia A l'evento “in 5 lanci non esce mai croce”; il numero dei casi possibili, ossia delle possibili sequenze di 5 lanci, è 2^5; c'è un unico caso favorevole, quindi

$$P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} = 0.03125$$

b – Sia B l'evento “nei primi 4 lanci non è mai uscita croce”; come prima si ha

$$P(\mathrm{B}) = \frac{1}{2^4}$$

La probabilità di A, sapendo che si è verificato B, è

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} = \frac{P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{B})} = \frac{\frac{1}{2^5}}{\frac{1}{2^4}} = \frac{1}{2}$$

Si noti che $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, perciò $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$.
Possiamo osservare come l'informazione ulteriore in nostro possesso abbia cambiato in modo evidente la valutazione della probabilità di uno stesso evento.

Può però accadere che la probabilità condizionata $P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$ sia uguale alla probabilità $P(\mathrm{B})$; questa condizione significa intuitivamente che sapere che A si è verificato non cambia la valutazione della probabilità di B. In questo caso si dà la seguente definizione.

Definizione 6

Due **eventi** A e B si dicono **indipendenti** se

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$$

In tal caso si ha pure

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = P(\mathrm{A})$$

Nel caso di due eventi indipendenti, il teorema 10 diventa

Teorema 11 – Regola di moltiplicazione per eventi indipendenti
Se due eventi A e B sono indipendenti, si ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{2.15}$$

Questa regola viene spesso assunta come definizione di eventi indipendenti; in ogni caso può essere usata per determinare se due eventi sono indipendenti.

Esempio 49
Qual è la probabilità di ottenere due volte testa in due lanci successivi di una moneta?

Poiché la probabilità di ottenere T è $P(T) = \frac{1}{2}$ per ciascun lancio e i due lanci sono indipendenti, la probabilità di ottenere due volte testa è

$$P(TT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Esempio 50
Si lancia due volte un dado. Calcolare la probabilità di ottenere 4, 5 o 6 al primo lancio e 1, 2, 3 o 4 al secondo.

Siano

$$A = \{4,5,6\} \qquad B = \{1,2,3,4\}$$

Si deve calcolare la probabilità $P(A \cap B)$.
Il risultato del secondo lancio è indipendente dal primo, cioè i due eventi A e B sono indipendenti, perciò

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}.$$

Esempio 51
Trovare la probabilità che in due lanci di un dado si presenti almeno una volta il 5.

Evento A = “5 al primo lancio”
Evento B = “5 al secondo lancio”
Evento $A \cup B$ = “ 5 al primo oppure al secondo lancio” .
Gli eventi non sono mutuamente esclusivi, perciò per il teorema 8 si ha

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Per calcolare $P(A \cap B)$ osserviamo che gli eventi A e B sono indipendenti, perciò

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

quindi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

Esempio 52
Le probabilità che un marito e una moglie siano vivi tra 20 anni sono rispettivamente 0.8 e 0.9 .
Trovare la probabilità che tra 20 anni
a – entrambi siano vivi;
b – nessuno dei due lo sia;
c – almeno uno dei due sia vivo.

Evento M = “marito vivo”
Evento D = “moglie viva”.

Supponiamo che gli eventi siano indipendenti (ipotesi che potrebbe anche non essere ragionevole).

a – $P(\text{entrambi vivi}) = P(\mathrm{M}\cap\mathrm{D}) = P(\mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{D}) = 0.8 \cdot 0.9 = 0.72$

b – $P(\text{nessuno vivo}) = P(\overline{\mathrm{M}} \cap \overline{\mathrm{D}}) = P(\overline{\mathrm{M}}) \cdot P(\overline{\mathrm{D}}) = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$

c – $P(\text{almeno uno vivo}) = 1 - P(\text{nessuno vivo}) = 1 - 0.02 = 0.98$

Esempio 53

Si estraggono due carte da un mazzo di 52 carte. Calcolare la probabilità di estrarre due assi se

a – la prima carta viene rimessa nel mazzo prima della seconda estrazione;

b – la prima carta non viene rimessa nel mazzo prima della seconda estrazione.

a – In questo caso gli eventi sono indipendenti; ci sono 4 assi nel mazzo, quindi

$$P = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

b – In questo caso gli eventi sono dipendenti; fra le 51 carte rimaste dopo l'estrazione del primo asso ci sono solo più 3 assi, quindi la probabilità di estrarre uno di questi è $\frac{3}{51}$; la probabilità richiesta è

$$P = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

*** *Esempio 54***

Un'urna contiene 8 palline rosse, 3 palline bianche e 9 palline nere. Si estraggono tre palline a caso senza rimetterle nell'urna dopo ogni estrazione. Determinare le probabilità che siano

a – tre rosse;

b – tre bianche;

c – almeno una bianca;

d – una per ciascun colore, senza tenere conto dell'ordine di estrazione;

e – due rosse e una nera, senza tenere conto dell'ordine di estrazione;

f – una rossa, una bianca e una nera, nell'ordine.

Evento R_1 = "rossa alla prima estrazione"
Evento B_1 = "bianca alla prima estrazione"
Evento N_1 = "nera alla prima estrazione"
Evento R_2 = "rossa alla seconda estrazione"
……

a – Evento $\mathrm{R}_1\cap \mathrm{R}_2\cap \mathrm{R}_3$ = "tre rosse"

$$P(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \mathrm{R}_3) = P(\mathrm{R}_1)\cdot P(\mathrm{R}_2 \mid \mathrm{R}_1)\cdot P(\mathrm{R}_3 \mid \mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2) =$$
$$= \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18} = \frac{14}{285} \cong 0.049$$

b – Evento $\mathrm{B}_1\cap \mathrm{B}_2\cap \mathrm{B}_3$ = "tre bianche"

$$P(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2 \cap \mathrm{B}_3) = P(\mathrm{B}_1)\cdot P(\mathrm{B}_2 \mid \mathrm{B}_1)\cdot P(\mathrm{B}_3 \mid \mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) =$$
$$= \frac{3}{20}\cdot\frac{2}{19}\cdot\frac{1}{18} = \frac{1}{1140} \cong 0.00088$$

c – $P(\text{"almeno una bianca"}) = 1 - P(\text{"nessuna bianca"})$

$$P(\text{"nessuna bianca"}) = \frac{\mathrm{C}_{17,3}}{\mathrm{C}_{20,3}} = \frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{34}{57} \cong 0.596$$

$$P(\text{“almeno una bianca”}) = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57} \cong 0.404$$

d – Non si tiene conto dell’ordine di estrazione

$$P(\text{“una rossa, una bianca e una nera”}) = \frac{C_{8,1} \cdot C_{3,1} \cdot C_{9,1}}{C_{20,3}} = \frac{18}{95} \cong 0.189$$

e – Non si tiene conto dell’ordine di estrazione

$$P(\text{“due rossa e una nera”}) = \frac{C_{8,2} \cdot C_{9,1}}{C_{20,3}} = \frac{21}{95} \cong 0.221$$

f – Si tiene conto dell’ordine di estrazione

$$P(R_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(R_1) \cdot P(B_2 \mid R_1) \cdot P(N_3 \mid R_1 \cap B_2) =$$

$$= \frac{8}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{9}{18} = \frac{3}{95} \cong 0.0316$$

Si noti che i quesiti d, ed e non possono essere risolti con la tecnica del quesito f, perché non è noto l’ordine di estrazione dei colori; ad esempio nel quesito e non si sa se le rosse siano le prime due estratte, quindi è sbagliato calcolare $P(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) \cdot P(N_3 \mid R_1 \cap R_2)$.

Esempio 55

Si lancia un dado; sia A l'evento “esce un numero pari” e B l'evento “esce un numero maggiore di 3” . Verificare se A e B sono indipendenti.

Si ha

$$A = \{2,4,6\} \qquad B = \{4,5,6\} \qquad A \cap B = \{4,6\}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Dunque gli eventi non sono indipendenti, essendo

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

In altre parole, sapere che il numero uscito è maggiore di 3 non lascia inalterata la valutazione della probabilità che il numero uscito sia pari; infatti

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \; .$$

Esempio 56

Data la tabella

	P(A)	P(B)	P(A∪B)
caso 1	0.1	0.9	0.91
caso 2	0.4	0.6	0.76
caso 3	0.5	0.3	0.73

Tabella 3

esaminare in quali casi gli eventi sono indipendenti.

Ricordando che (teorema 8)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

si ottiene

	P(A∩B)	P(A)·P(B)	indipendenza
caso 1	0.09	0.09	sì
caso 2	0.24	0.24	sì
caso 3	0.07	0.15	no

Tabella 4

Esempio 57
Si effettuano due lanci di un dado. Sia
Evento A = "primo lancio pari"
Evento B = "secondo lancio ≤ 2".
Stabilire se gli eventi A e B sono indipendenti.

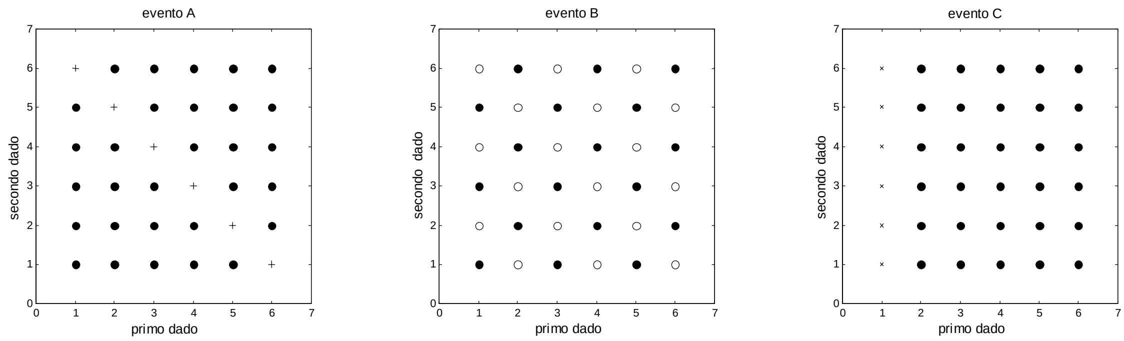
Lo spazio campione S ha 36 elementi, che sono le seguenti coppie

$$S = \{(1,1),(1,2),...(1,6),(2,1),...(5,6),(6,6)\}.$$
$$A = \{2,4,6\} \qquad B = \{1,2\}$$

A e B sono indipendenti: infatti

$$P(\text{A}) = \frac{3}{6} \qquad\qquad P(\text{B}) = \frac{2}{6}$$
$$\text{A}\cap\text{B} = \{(2,1),(2,2),(4,1),(4,2),(6,1),(6,2)\}$$
$$P(\text{A}\cap\text{B}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = P(\text{A}) \cdot P(\text{B})$$

Esempio 58
Si effettua il lancio di due dadi. Sia
Evento A = "somma uguale a 7"
Evento B = "somma dispari"
Evento C = "1 sul primo dado"
Verificare se sono indipendenti le coppie di eventi
a – A e B
b – A e C
c – B e C



\+ = somma 7 o = somma dispari × = 1 sul primo dado

Figura 6

Casi possibili: 36
Casi favorevoli per l'evento A: 6. Casi favorevoli per l'evento B: 18.
Casi favorevoli per l'evento C: 6.

$$P(\text{A}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(\text{B}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad P(\text{C}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

a – $\quad P(A \cap B) = \dfrac{1}{6} \qquad P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \;\Rightarrow$ A e B non sono indipendenti

b – $\quad P(A \cap C) = \dfrac{1}{36} \qquad P(A) \cdot P(C) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \;\Rightarrow$ A e B sono indipendenti

c – $\quad P(B \cap C) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12} \qquad P(B) \cdot P(C) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \;\Rightarrow$ B e C sono indipendenti

Esempio 59
Un dado è lanciato quattro volte. Calcolare la probabilità di ottenere almeno un 6 in quattro lanci.

Evento A = “almeno un 6 in 4 lanci”
Evento $\overline{A}$ = “nessun 6 in quattro lanci”.
La probabilità di non ottenere 6 in un singolo lancio è $\dfrac{5}{6}$, quindi la probabilità di non ottenere nessun 6 in quattro lanci (eventi indipendenti) è

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 .$$

Pertanto

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0.518 .$$

Si osservi che **eventi mutuamente esclusivi,** (ossia **disgiunti**), **non sono indipendenti.**
Infatti per ogni coppia di eventi disgiunti A e B si ha $A \cap B = \emptyset$; se A e B fossero indipendenti dovrebbe essere

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 = P(A) \cdot P(B)$$

quindi almeno uno dei due eventi dovrebbe avere probabilità 0, cioè essere impossibile.
In realtà due eventi disgiunti sono fortemente dipendenti, perché disgiunti significa che se uno si realizza, allora l’altro non si può realizzare.

2.6 Il teorema di Bayes

Consideriamo la situazione illustrata con il seguente diagramma di Venn

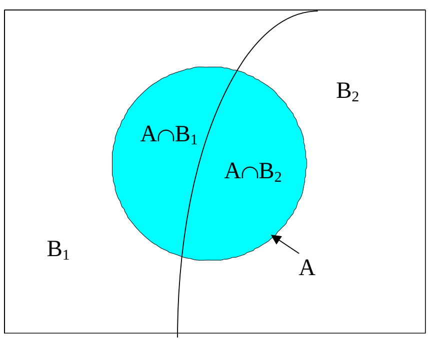


Figura 7

Gli eventi B_1 e B_2 sono tali che

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset \qquad \text{e} \qquad B_1 \cup B_2 = S$$

dove S è lo spazio campione. Gli insiemi $A \cap B_1$ e $A \cap B_2$ sono mutuamente esclusivi, perciò

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2).$$

Applicando la regola di moltiplicazione (2.14) si ottiene

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2).$$

Questa formula esprime la regola della probabilità totale nel caso particolare di due eventi B_1 e B_2. La regola può essere generalizzata al caso di una famiglia di *n* eventi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ mutuamente esclusivi ed esaustivi[2].

Si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 12 – Teorema della probabilità totale

Sia A un evento e $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ una famiglia di eventi dello spazio campione S mutuamente esclusivi e tali che uno e uno solo di essi si verifichi, ossia tali che

$$B_i \cap B_j = \varnothing \qquad \text{per } i \neq j \qquad \text{(mutuamente esclusivi)}$$

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S \qquad \text{(esaustivi)}$$

$$P(B_i) \neq 0 \qquad \text{per ogni } i$$

Allora si dimostra che

$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) \qquad (2.16)$$

Per dimostrare questo risultato è sufficiente osservare che se A si verifica, esso deve verificarsi insieme ad uno e uno solo degli eventi $B_1, B_2, \ldots, B_n$, perciò

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n).$$

Applicando il teorema 10 si ha

$$P(A \cap B_i) = P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$$

Sostituendo questa relazione nella precedente si ottiene la tesi.

L'utilità del teorema sta nel fatto che talvolta $P(A)$ è difficile da calcolare direttamente, mentre è più facile calcolare le probabilità $P(A \mid B_i)$ e poi ricostruire $P(A)$ dalla formula (2.16).

Esempio 60

Siano date due urne che contengono rispettivamente

urna I 2 palline rosse e 1 nera

urna II 3 palline rosse e 2 nere.

Scegliamo a caso un'urna ed estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

Evento B_1 = "è stata scelta l'urna I"

Evento B_2 = "è stata scelta l'urna II"

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing \qquad B_1 \cup B_2 = S$$

Evento A = "è stata estratta una pallina nera "

Applicando il teorema della probabilità totale si ha

$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)$$

Si ha

$$P(B_1) = \frac{1}{2} \qquad P(B_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \mid B_1) = \frac{1}{3} \qquad P(A \mid B_2) = \frac{2}{5}$$

[2] Gli eventi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ si dicono **esaustivi**, se la loro unione è tutto lo spazio campione.

quindi

$$P(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{30} \cong 0.367\ .$$

Si osservi che la probabilità è diversa da quella che si avrebbe se tutte le palline fossero contenute in un'unica urna: in questo caso la probabilità di estrarre una pallina nera sarebbe

$$P(\mathrm{A}) = \frac{3}{8} = 0.375\ .$$

La differenza fra i due risultati dipende dal fatto che le due urne contengono un numero diverso di palline, quindi una pallina dell'urna I non ha la stessa probabilità di essere estratta di una pallina dell'urna II.

Esempio 61

Riferendoci all'esempio 60 possiamo ora porre il seguente quesito: se è stata estratta una pallina nera, qual è la probabilità di aver scelto l'urna I?

Per rispondere a questa domanda bisogna calcolare la probabilità $P(\mathrm{B}_1 \mid \mathrm{A})$.

Dal teorema 10 si ricava la relazione

$$P(\mathrm{B}_1 \mid \mathrm{A})\cdot P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_1)\cdot P(\mathrm{B}_1)$$

da cui segue

$$P(\mathrm{B}_1 \mid \mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_1)\cdot P(\mathrm{B}_1)}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{5}{11} \cong 0.455\ .$$

Generalizzando il procedimento seguito nell'esempio 61 si può ottenere il seguente importante risultato.

Teorema 13 – Teorema di Bayes

Sia A un evento con $P(\mathrm{A}) > 0$ e $\{\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n\}$ una famiglia di eventi dello spazio campione S soddisfacenti le ipotesi del teorema precedente.

Allora

$$P(\mathrm{B}_k \mid \mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_k)\cdot P(\mathrm{B}_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_i)\cdot P(\mathrm{B}_i)} \qquad \text{per ogni } k \tag{2.17}$$

Questo teorema ci permette di trovare le probabilità degli eventi B_k che possono essere la causa del verificarsi dell'evento A, in altre parole che l'effetto A sia stato provocato dalla causa B_k; per questo motivo è detto anche **teorema della probabilità delle cause**.

Esempio 62

Siano date due urne contenenti delle palline bianche e nere; nell'urna I il 70% delle palline sono nere; nell'urna II il 40% delle palline sono nere.

La probabilità di scegliere l'urna I sia 0.1; la probabilità di scegliere l'urna II sia invece 0.9. Calcolare la probabilità che una pallina nera estratta a caso provenga dall'urna I.

Evento A = "pallina estratta nera";
Evento B_1 = "la pallina proviene dall'urna I";
Evento B_2 = "la pallina proviene dall'urna II".

$$P(\mathrm{B}_1) = 0.1 \qquad P(\mathrm{B}_2) = 0.9$$
$$P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_1) = 0.7 \qquad P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_2) = 0.4$$

Dal teorema di Bayes segue

$$P(\text{dall'urna I} \mid \text{nera}) = P(\mathrm{B}_1 \mid \mathrm{A}) =$$
$$= \frac{P(\mathrm{B}_1)\cdot P(\mathrm{A}\mid \mathrm{B}_1)}{P(\mathrm{B}_1)\cdot P(\mathrm{A}\mid \mathrm{B}_1)+P(\mathrm{B}_2)\cdot P(\mathrm{A}\mid \mathrm{B}_2)} = \frac{0.1\cdot 0.7}{0.1\cdot 0.7+0.9\cdot 0.4} = 0.163 = 16.3\%$$

Il risultato può essere interpretato come segue: effettuando numerose prove, nel 16.3% dei casi in cui si è estratta una pallina nera, essa proviene dall'urna I.

Esempio 63

Un problema di collaudo in un processo produttivo. Un'industria ha installato un sistema automatico per il controllo di qualità, che garantisce che, se un pezzo è difettoso, viene eliminato con probabilità 0.995. C'è una probabilità pari a 0.001 che anche un pezzo non difettoso venga eliminato. Si sa anche che la probabilità che un pezzo sia difettoso è 0.2.
Calcoliamo la probabilità che un pezzo che non sia stato eliminato al controllo di qualità sia difettoso.

Evento E = "il pezzo viene eliminato"
Evento D = "il pezzo è difettoso"
Sappiamo che

$$P(\mathrm{E}\mid \mathrm{D}) = 0.995 \qquad P(\mathrm{E}\mid \overline{\mathrm{D}}) = 0.001 \qquad P(\mathrm{D}) = 0.2$$

Con il teorema di Bayes vogliamo calcolare

$$P(\mathrm{D}\mid \overline{\mathrm{E}}) = \frac{P(\overline{\mathrm{E}}\mid \mathrm{D})\cdot P(\mathrm{D})}{P(\overline{\mathrm{E}}\mid \mathrm{D})\cdot P(\mathrm{D}) + P(\overline{\mathrm{E}}\mid \overline{\mathrm{D}})\cdot P(\overline{\mathrm{D}})}$$

Abbiamo

$$P(\overline{\mathrm{E}}\mid \mathrm{D}) = 1 - P(\mathrm{E}\mid \mathrm{D}) = 1 - 0.995 = 0.005$$
$$P(\overline{\mathrm{E}}\mid \overline{\mathrm{D}}) = 1 - P(\mathrm{E}\mid \overline{\mathrm{D}}) = 1 - 0.001 = 0.999$$
$$P(\overline{\mathrm{D}}) = 1 - P(\mathrm{D}) = 1 - 0.2 = 0.8$$

Calcoliamo perciò

$$P(\mathrm{D}\mid \overline{\mathrm{E}}) = \frac{P(\overline{\mathrm{E}}\mid \mathrm{D})\cdot P(\mathrm{D})}{P(\overline{\mathrm{E}}\mid \mathrm{D})\cdot P(\mathrm{D}) + P(\overline{\mathrm{E}}\mid \overline{\mathrm{D}})\cdot P(\overline{\mathrm{D}})} =$$
$$= \frac{0.005\cdot 0.2}{0.005\cdot 0.2 + 0.999\cdot 0.8} \cong 0.00125 = 0.125\%$$

Esempio 64

Un problema di marketing. Il responsabile marketing di una società che produce giocattoli sta analizzando le probabilità di successo sul mercato di un nuovo gioco. Nell'esperienza passata della ditta il 65% dei nuovi giocattoli ha avuto successo di mercato, mentre il restante 35% non l'ha ottenuto. Si sa inoltre che l'80% dei giocattoli di successo avevano ricevuto un giudizio positivo da parte degli esperti di marketing della società prima dell'immissione del prodotto sul mercato, mentre lo stesso giudizio era stato attribuito solo al 30% dei giocattoli che si sarebbero poi rivelati un insuccesso di mercato.
Il responsabile è interessato a calcolare la probabilità che il nuovo giocattolo sia premiato dal mercato, sapendo che gli esperti della società lo hanno valutato positivamente.

Evento S = "giocattolo di successo"
Evento $\overline{\mathrm{S}}$ = "giocattolo non di successo"
Evento Pos = "giudizio positivo degli esperti di marketing"
Evento Neg = " giudizio negativo degli esperti di marketing ".

Sappiamo che

$$P(\mathrm{S}) = 0.65 \qquad P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{S}) = 0.80$$
$$P(\overline{\mathrm{S}}) = 0.35 \qquad P(\mathrm{Pos} \mid \overline{\mathrm{S}}) = 0.30$$

Con il teorema di Bayes calcoliamo

$$P(\mathrm{S} \mid \mathrm{Pos}) = \frac{P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{S})}{P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{S}) + P(\mathrm{Pos} \mid \overline{\mathrm{S}}) \cdot P(\overline{\mathrm{S}})} =$$
$$= \frac{0.80 \cdot 0.65}{0.80 \cdot 0.65 + 0.30 \cdot 0.35} = 0.832 = 83.2\%$$

La probabilità dell'evento complementare, ossia che il giocattolo valutato positivamente dagli esperti della società non abbia poi successo di mercato, vale

$$P(\overline{\mathrm{S}} \mid \mathrm{Pos}) = 1 - P(\mathrm{S} \mid \mathrm{Pos}) = 1 - 0.832 = 0.168 = 16.8\% .$$

Esempio 65

Quattro tecnici si occupano delle riparazioni dei guasti che accadono in una linea automatica di produzione.

Il primo tecnico effettua il 20% delle riparazioni e in un caso su 20 non esegue correttamente il lavoro; il secondo tecnico effettua il 60% delle riparazioni e in un caso su 10 non esegue correttamente il lavoro; il terzo tecnico effettua il 15% delle riparazioni e in un caso su 10 non esegue correttamente il lavoro; il quarto tecnico effettua il 5% delle riparazioni e in un caso su 20 non esegue correttamente il lavoro.

Il successivo guasto viene ritenuto una conseguenza della precedente riparazione imperfetta; qual è la probabilità che la precedente riparazione sia stata fatta dal primo tecnico?

Evento B_1 = "riparazione eseguita dal 1° tecnico" $\quad P(B_1) = 0.20 \quad P(A \mid B_1) = 0.05$

Evento B_2 = "riparazione eseguita dal 2° tecnico" $\quad P(B_2) = 0.60 \quad P(A \mid B_2) = 0.10$

Evento B_3 = "riparazione eseguita dal 3° tecnico" $\quad P(B_3) = 0.15 \quad P(A \mid B_3) = 0.10$

Evento B_4 = "riparazione eseguita dal 4° tecnico" $\quad P(B_4) = 0.05 \quad P(A \mid B_4) = 0.05$

Applicando il teorema di Bayes si trova

$$P(B_1 \mid A) = \frac{(0.20)(0.05)}{(0.20)(0.05) + (0.60)(0.10) + (0.15)(0.10) + (0.05)(0.05)} = 0.114 .$$

E' interessante notare che, sebbene il primo tecnico svolga un lavoro imperfetto solo nel 5% dei casi, tuttavia più dell'11% delle riparazioni non perfette sono una sua responsabilità.

Esempio 66

Per produrre uno stesso tipo di prodotto sono impiegate tre diverse macchine, M_1, M_2, M_3, che producono pezzi difettosi con le rispettive probabilità: 1%, 2% e 0.1%.

Le tre macchine producono rispettivamente il 30%, il 50% e il 20% della produzione totale.

a – Qual è la probabilità che un pezzo uscito dalla fabbrica sia difettoso?

b – Qual è la probabilità che un pezzo difettoso sia stato prodotto dalla macchina M_2?

Evento D = "pezzo difettoso".

Si hanno le seguenti probabilità

$$P(M_1) = 30\% = 0.3 \qquad P(D \mid M_1) = 1\% = 0.01$$
$$P(M_2) = 50\% = 0.5 \qquad P(D \mid M_2) = 2\% = 0.02$$
$$P(M_3) = 20\% = 0.2 \qquad P(D \mid M_3) = 0.1\% = 0.001$$

a – Applicando il teorema della probabilità totale si trova la probabilità che un pezzo sia difettoso, non importa da quale macchina sia stato prodotto

$$P(\mathrm{D}) = P(\mathrm{D} \mid \mathrm{M}_1)\cdot P(\mathrm{M}_1) + P(\mathrm{D} \mid \mathrm{M}_2)\cdot P(\mathrm{M}_2) + P(\mathrm{D} \mid \mathrm{M}_3)\cdot P(\mathrm{M}_3) =$$
$$= 0.01\cdot 0.3 + 0.02\cdot 0.5 + 0.001\cdot 0.2 = 0.0132 = 1.32\%$$

b – Applicando il teorema di Bayes si trova la probabilità che il pezzo difettoso sia stato prodotto dalla macchina M_2

$$P(\mathrm{M}_2 \mid D) = \frac{P(\mathrm{D} \mid \mathrm{M}_2)\cdot P(\mathrm{M}_2)}{P(\mathrm{D} \mid \mathrm{M}_1)\cdot P(\mathrm{M}_1) + P(\mathrm{D} \mid \mathrm{M}_2)\cdot P(\mathrm{M}_2) + P(\mathrm{D} \mid \mathrm{M}_3)\cdot P(\mathrm{M}_3)} =$$
$$= \frac{0.02\cdot 0.5}{0.0132} \cong 0.76 = 76\%$$

Quindi in circa $\frac{3}{4}$ dei casi si può ritenere che la causa di un pezzo difettoso sia la macchina M_2.

Nel caso in cui gli eventi della famiglia $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ hanno la stessa probabilità $P(\mathrm{B}_i) = \frac{1}{n}$, la formula del teorema di Bayes si semplifica e diventa

$$P(\mathrm{B}_k \mid \mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_k)}{\sum_{i=1}^{n} (P\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_i)} \qquad \text{per ogni } k \qquad (2.18)$$

Esempio 67

Quattro tiratori di una stessa squadra vengono classificati in base alle probabilità di fare centro con un tiro; al tiratore T_1 viene attribuita una probabilità dell'80%, al tiratore T_2 una probabilità del 50%, al tiratore T_3 una probabilità del 20% e al tiratore T_4 una probabilità del 10%. I quattro tiratori sparano contemporaneamente un colpo ciascuno e solo uno ha fatto centro: qual è la probabilità che il centro sia stato colpito da T_1?

Evento T_i = "centro colpito da T_i " $\qquad P(\mathrm{T_i}) = \frac{1}{4}$.

Evento C = "il tiratore ha fatto centro".

Applicando la formula di Bayes nella forma semplificata (2.18) si ha

$$P(\mathrm{T}_1 \mid \mathrm{C}) = \frac{P(\mathrm{C} \mid \mathrm{T}_1)}{P(\mathrm{C} \mid \mathrm{T}_1) + P(\mathrm{C} \mid \mathrm{T}_2) + P(\mathrm{C} \mid \mathrm{T}_3) + P(\mathrm{C} \mid \mathrm{T}_4)} = \frac{0.8}{0.8 + 0.5 + 0.2 + 0.1} = 0.5 = 50\%$$

Applicazione del teorema di Bayes a un problema di diagnosi medica.

Il teorema di Bayes trova un'importante applicazione in ambito sanitario.
In un test clinico, un individuo viene sottoposto ad un certo esame di laboratorio, per stabilire se ha o non ha una data malattia. Il test può avere esito positivo (il che indica la presenza della malattia) o negativo (il che indica che l'individuo è sano). C'è però sempre una possibilità di errore: può darsi che qualcuno degli individui risultati positivi siano in realtà sani ("**falsi positivi**"), e che qualcuno degli individui risultati negativi siano in realtà malati ("**falsi negativi**").
Prima di applicare il test nei laboratori su larga scala, è quindi opportuno valutarne la bontà. Per far questo si possono sottoporre al test un campione di persone di cui sappiamo già se sono sane o malate, e vedere se la risposta del test è corretta.
Gli eventi a cui siamo interessati sono
Evento M = "l'individuo è malato"
Evento S = "l'individuo è sano"
Evento Pos = "il test è positivo"
Evento Neg = "il test è negativo".

Utilizzando la nozione di probabilità condizionata si danno le seguenti definizioni.

Definizione 7
La probabilità condizionata $\boldsymbol{P}(\mathbf{Pos}|\mathbf{M})$ viene detta **sensibilità** del test.

Definizione 8
La probabilità condizionata $\boldsymbol{P}(\mathbf{Neg}|\mathbf{S})$ viene detta **specificità** del test.

Il test è tanto più sensibile quanto più è probabile che un malato risulti positivo, ed è tanto più specifico quanto più è probabile che un sano risulti negativo, ovvero che solo i malati risultino positivi. Pertanto un buon test è un test con sensibilità e specificità molto vicine a 1.
Supponiamo ora che il test venga effettivamente applicato per scoprire se una persona è malata o meno. Calcoliamo la probabilità che un individuo che risulta positivo al test sia effettivamente malato. Questa è una probabilità condizionata e si definisce nel modo seguente.

Definizione 9
La probabilità che un individuo che risulta positivo al test sia effettivamente malato $\boldsymbol{P}(\mathbf{M}\,|\,\mathbf{Pos})$ viene detta **valore predittivo** del test.

Per il teorema di Bayes il valore predittivo del test è

$$P(\mathrm{M}\,|\,\mathrm{Pos}) = \frac{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{M})\cdot P(\mathrm{M})}{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{M})\cdot P(\mathrm{M}) + P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{S})\cdot P(\mathrm{S})}$$

Si può quindi notare che per calcolare il valore predittivo del test non basta conoscerne la sensibilità e la specificità, ma occorre conoscere anche la probabilità P(M) con cui la malattia colpisce la popolazione complessiva.

Esempio 68
Supponiamo che la probabilità che una persona abbia una certa malattia sia uguale a 0.03. La diagnosi della malattia viene fatta con un test che ha le seguenti caratteristiche: applicato a un individuo affetto dalla malattia dà risultato positivo con probabilità pari a 0.9; applicato a un individuo sano dà esito positivo con probabilità pari a 0.02.
Supponiamo che su un individuo il test abbia dato risultato positivo: qual è la probabilità che sia effettivamente malato?

Con le notazioni sopra suggerite si ha

$$P(\mathrm{M}) = 0.03 \qquad\qquad P(\mathrm{S}) = 1 - P(\mathrm{M}) = 0.97$$

$$P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{M}) = 0.9 \quad \text{(sensibilità)}$$

$$P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{S}) = 0.02$$

La probabilità che l’individuo sia malato, sapendo che il test è positivo, è il valore predittivo e si calcola con il teorema di Bayes

$$P(\mathrm{M}\,|\,\mathrm{Pos}) = \frac{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{M})\cdot P(\mathrm{M})}{P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{M})\cdot P(\mathrm{M}) + P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{S})\cdot P(\mathrm{S})} = \frac{0.9\cdot 0.03}{0.9\cdot 0.03 + 0.02\cdot 0.97} = 0.582$$

In base a questo risultato possiamo dire che solo il 58% circa di coloro che risultano positivi al test è effettivamente malato, il restante 42% sono falsi positivi.
Osserviamo che la probabilità che una persona sia malata, sapendo che è risultata positiva al test, è comunque maggiore della probabilità che aveva prima di sottoporsi al test.
La probabilità che il test dia esito positivo si calcola con il teorema della probabilità totale, ed è uguale al denominatore della frazione nel teorema di Bayes

$$P(\mathrm{Pos}) = P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{M})\cdot P(\mathrm{M}) + P(\mathrm{Pos}\,|\,\mathrm{S})\cdot P(\mathrm{S}) = 0.9\cdot 0.03 + 0.02\cdot 0.97 = 0.0464$$

Supponiamo ora che il test abbia dato risultato negativo: qual è la probabilità che l’individuo sia sano?

Anche questa probabilità si calcola con il teorema di Bayes

$$P(\mathrm{S} \mid \mathrm{Neg}) = \frac{P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{S})}{P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{S}) + P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{M})}$$

Osserviamo che

$$P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{S}) = 1 - P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{S}) = 1 - 0.02 = 0.98 \quad \text{(specificità)}$$
$$P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{M}) = 1 - P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{M}) = 1 - 0.9 = 0.1$$

Pertanto

$$P(\mathrm{S} \mid \mathrm{Neg}) = \frac{0.98 \cdot 0.97}{0.98 \cdot 0.97 + 0.1 \cdot 0.03} = 0.997$$

In conclusione, se il test è risultato negativo, abbiamo una probabilità molto alta che la persona sia sana, quindi il test è altamente predittivo negativamente, mentre non è molto predittivo in senso positivo (solo il 58% circa). In altre parole i falsi negativi sono pochissimi, mentre i falsi positivi sono piuttosto numerosi (il 42%).

Esempio 69
Caso di una malattia rara.
La sensibilità del test per una data malattia rara (ad esempio l'HIV) sia circa uguale a 0.993: la specificità del test sia circa 0.9999. La probabilità di contrarre la malattia nella popolazione sia circa 0.000025.

$$P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{M}) = 0.993 \qquad \text{(sensibilità)}$$
$$P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{S}) = 0.9999 \qquad \text{(specificità)}$$
$$P(\mathrm{M}) = 0.000025$$

La probabilità che una persona risultata positiva a questo test sia effettivamente malata è, con il teorema di Bayes

$$P(\mathrm{M} \mid \mathrm{Pos}) = \frac{P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{M})}{P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{M}) + P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{S})} =$$
$$= \frac{0.993 \cdot 0.000025}{0.993 \cdot 0.000025 + (1 - 0.9999) \cdot (1 - 0.000025)} = 0.19888 \cong 20\%$$

Questo significa che solo il 20% circa di coloro che risultano positivi al test sono effettivamente malati; in altre parole l'80% sono "falsi positivi". Il risultato, apparentemente sorprendente, dipende dal fatto che la malattia che si cerca è molto rara sulla popolazione complessiva.
Si osservi che si sta supponendo di sottoporre al test persone di cui a priori non si sa nulla; se si applicasse il test a persone scelte non casualmente, ma in qualche "categoria a rischio" (ad esempio per l'HIV fra i tossicodipendenti), la probabilità P(M) andrebbe sostituita con la probabilità della malattia in quella classe di persone, e sarebbe più elevata; risulterebbe più elevato di conseguenza il valore predittivo del test.
Si noti ancora che la probabilità che una persona sia malata, sapendo che è risultata positiva al test, è comunque molto maggiore della probabilità che aveva prima di sottoporsi al test

$$\frac{P(\mathrm{M} \mid \mathrm{Pos})}{P(\mathrm{M})} = \frac{0.19888}{0.000025} \cong 7955 \ .$$

(la probabilità è cresciuta di circa 8000 volte).
Se calcoliamo la probabilità che una persona risultata negativa al test sia sana, otteniamo

$$P(\mathrm{S} \mid \mathrm{Neg}) = \frac{P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{S})}{P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{s}) + P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{M})} =$$
$$= \frac{0.9999 \cdot (1 - 0.000025)}{0.9999 \cdot (1 - 0.000025) + (1 - 0.993) \cdot 0.000025} = 0.9999998$$

Il numero dei falsi negativi è quindi molto basso.