4. *Distribuzioni di probabilità discrete*

4.1 Distribuzione binomiale o di Bernoulli

Il concetto di variabile aleatoria permette di formulare modelli utili allo studio di molti fenomeni aleatori. Un primo importante esempio di modello probabilistico è la distribuzione di Bernoulli, così chiamata in onore del matematico svizzero James Bernoulli (1654-1705), che diede importanti contributi nel campo della probabilità..
Alcuni esperimenti consistono nell'eseguire ripetutamente una data prova. Ad esempio vogliamo conoscere la probabilità che 45 su 300 guidatori fermati a un blocco stradale indossino la cintura di sicurezza, oppure la probabilità che 9 su 10 lampadine durino almeno 1000 ore.
In ciascuno di questi esempi si cerca la probabilità di ottenere ***x* successi in *n* prove** o, in altre parole, x successi e $n - x$ insuccessi.
Una sequenza di **prove bernoulliane** costituisce un **processo di Bernoulli** sotto le seguenti ipotesi:
1 – ci sono solo due possibili risultati mutuamente esclusivi per ogni prova, chiamati arbitrariamente "successo" e "insuccesso";
2 – la probabilità di successo p è la stessa per ogni prova;
3 – tutte le prove sono indipendenti; l'indipendenza significa che il risultato di una prova non è influenzato dal risultato di qualunque altra prova; ad esempio, l'evento "alla terza prova si ha successo" è indipendente dall'evento "alla prima prova si ha successo".

Esempio 1
Il lancio di una moneta è una prova bernoulliana: si può considerare successo l'evento "esce testa" e insuccesso l'evento "esce croce". In questo caso la probabilità di successo vale $p = \frac{1}{2}$.
Nel lancio di due dadi si può considerare successo ad esempio l'evento "la somma dei punti è 7" e insuccesso l'evento complementare: in questo caso si tratta di una prova bernoulliana e la probabilità di successo è $p = \frac{1}{6}$.

Sia p la probabilità di successo in una prova bernoulliana.
La variabile aleatoria X che conta il numero di successi in n prove si dice **variabile aleatoria binomiale di parametri *n* e *p***; X può assumere come valori gli interi compresi fra 0 e n.
Si dimostra il seguente risultato[1].

Teorema 1
La probabilità che in n prove la variabile aleatoria X assuma il valore x, ossia che il successo si verifichi x volte in n prove, è data dalla **distribuzione di probabilità binomiale o di Bernoulli**

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \text{per } x = 0,1,2,\dots,n \tag{4.1}$$

La **funzione di distribuzione binomiale** è data da

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{4.2}$$

[1] Si ricordi che

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

(Vedere anche la definizione di combinazioni e coefficienti binomiali, Cap. 2, pag. 66)

La distribuzione binomiale si indica anche con il simbolo

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \text{per } x = 0,1,2,\dots,n$$

Si osservi che $n-x$ è il numero di insuccessi, e $q = 1-p$ la probabilità di insuccesso.
La funzione di distribuzione binomiale si indica anche con il simbolo

$$B(x;n,p) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad .$$

La media e la varianza di una distribuzione binomiale dipendono solo da n e p; si dimostra la seguente proprietà.

Proprietà 1
Se X è una variabile aleatoria avente distribuzione binomiale con parametri n e p, allora il **valor medio** è

$$\mu = np \tag{4.3}$$

e la **varianza** è

$$\sigma^2 = np(1-p) \tag{4.4}$$

Nel calcolo della probabilità con la distribuzione binomiale e con la funzione di ripartizione binomiale sono utili le seguenti relazioni.

Proprietà 2

$$P(X < x) = P(X \le x-1) \tag{4.5}$$

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x) \tag{4.6}$$

$$P(X \ge x) = 1 - P(X \le x-1) \tag{4.7}$$

$$P(X = x) = P(X \le x) - P(X \le x-1) \tag{4.8}$$

Si presti attenzione a non confondere le probabilità $P(X < x)$ e $P(X \le x)$: nel caso delle distribuzioni discrete queste due probabilità non sono uguali.

Esempio 2
Calcolare la probabilità di ottenere 2 volte testa, effettuando 6 lanci di una moneta.

numero prove $n = 6$

numero successi $x = 2$

probabilità di successo $p = \frac{1}{2}$

$$P(X=2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} = \frac{15}{64} \cong 0.2344$$

Esempio 3
Si effettuano 20 lanci di un dado; il successo sia di ottenere 3. Calcolare la probabilità di ottenere 2 volte il caso di successo.

$n = 20 \qquad x = 2 \qquad p = \frac{1}{6}$

$$P(X=2) = \binom{20}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{20-2} = \binom{20}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \cong 0.1982$$

Esempio 4
Calcolare la probabilità che, effettuando quattro estrazioni con reimbussolamento da un'urna contenente 20 palline bianche e 30 nere, venga estratta per tre volte una pallina bianca.

La probabilità di successo (estrazione di pallina bianca) è

$$p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$n = 4 \qquad x = 3$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(1 - \frac{2}{5}\right)^1 = 4 \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{3}{5} \cong 0.1536$$

Esempio 5
Si effettuano 10 lanci successivi di una moneta; calcolare la probabilità che per metà delle volte esca croce e per metà testa.

In questo caso si ha

$$n = 10 \qquad x = 5 \qquad p = \frac{1}{2} \qquad 1 - p = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cong 0.2461$$

Esempio 6
Calcolare la probabilità che effettuando 6 lanci di due dadi si ottenga la somma 9
a – 2 volte;
b – almeno 2 volte.

Il successo sia di ottenere come somma 9; calcoliamo la probabilità di successo. Servendosi del grafico riprodotto nella figura 9, pag. 97, si deduce facilmente che i casi possibili sono 36 e i casi favorevoli sono 4; questi ultimi sono dati dalle coppie

(3, 6) (4, 5) (5, 4) (6, 3).

Pertanto la probabilità di successo è

$$p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

a – $\quad n = 6 \qquad x = 2 \qquad p = \frac{1}{9}$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^4 = 0.1156$$

b – $\quad P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$

$$= 1 - \left[\binom{6}{0}\left(\frac{1}{9}\right)^0\left(\frac{8}{9}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{9}\right)^1\left(\frac{8}{9}\right)^5\right] = 1 - (0.4933 + 0.3700) = 0.1367$$

Esempio 7
La probabilità di laurearsi di uno studente che si iscrive all'Università è p = 0.4. Calcolare la probabilità che su 5 studenti
a – nessuno si laurei;
b – uno si laurei;
c – almeno uno si laurei;
d – tutti si laureino.

Il successo è che lo studente si laurei; la variabile aleatoria X indica il numero di laureati.

a – $n = 5$ $x = 0$ $p = 0.4$

$$P(X = 0) = \binom{5}{0}(0.4)^0(0.6)^5 = 0.07776$$

b – $$P(X = 1) = \binom{5}{1}(0.4)^1(0.6)^4 = 0.2592$$

c – $$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.07776 = 0.9222$$

d – $$P(X = 5) = \binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0 = 0.01024$$

Esempio 8

La ditta produttrice sostiene che nel 60% degli impianti a pannelli solari installati si è verificata una riduzione di un terzo del costo della fattura dell'energia elettrica. Calcolare la probabilità che questa riduzione si verifichi

a – in 4 su 5 installazioni;

b – in almeno 4 installazioni.

a – $n = 5$ $x = 4$ $p = 0.60$

$$P(X = 4) = \binom{5}{4}(0.60)^4(1 - 0.60)^{5-4} = 0.2592$$

b – $n = 5$ $x = 5$ $p = 0.60$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5}(0.60)^5(1 - 0.60)^{5-5} = 0.07776$$

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0.2592 + 0.07776 = 0.3370$$

Esempio 9

Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla: ci sono 4 risposte possibili per ogni domanda, di cui una sola esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente ad almeno 8 domande. Rispondendo a caso alle domande, qual è la probabilità di superare il test?

La variabile aleatoria X indica il numero delle risposte esatte.

$n = 10$ $x = 8$ $p = \frac{1}{4}$

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$

$$= \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^1 + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^0$$

$$= 45 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 0.0004158 \cong 0.04\%$$

Esempio 10

La probabilità che un apparecchio subisca un certo tipo di guasto è $p = 0.05$; calcolare la probabilità che su 16 di tali apparecchi

a – al più 2 si guastino;

b – almeno 2 si guastino;

c – almeno 4 si guastino.

La variabile aleatoria X indica il numero dei guasti.

$$n = 16 \qquad p = 0.05 \qquad 1 - p = 0.95$$

a – $$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = \binom{16}{0}(0.05)^0 (0.95)^{16} = 0.4401$$

$$P(X = 1) = \binom{16}{1}(0.05)^1 (0.95)^{15} = 0.3706$$

$$P(X = 2) = \binom{16}{2}(0.05)^2 (0.95)^{14} = 0.1463$$

$$P(X \le 2) = 0.4401 + 0.3706 + 0.1463 = 0.9570$$

b – $$P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$$
$$= 1 - 0.4401 - 0.3706 = 0.1893$$

c – $$P(X \ge 4) = 1 - P(X < 4)$$

$$P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 3) = \binom{16}{3}(0.05)^3 (0.95)^{13} = 0.0359$$

$$P(X \ge 4) = 1 - (0.4401 + 0.3706 + 0.1463 + 0.0359) = 0.0071$$

Esempio 11

Determinare la probabilità che lanciando 3 volte una moneta si verifichi

a – 3 volte T;
b – 2 volte C e una volta T;
c – almeno una volta T;
d – al più una volta C.

La variabile aleatoria X indica il numero di teste.

$$n = 3 \qquad p = 0.5$$

a – $$P(X = 3) = \binom{3}{3}(0.5)^3 (0.5)^0 = \frac{1}{8}$$

b – $$P(X = 1) = \binom{3}{1}(0.5)^1 (0.5)^2 = \frac{3}{8}$$

c – $$P(X \ge 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$
$$= \frac{3}{8} + \binom{3}{2}(0.5)^2 (0.5)^1 + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

d – $$P(\text{al più } 1\,\text{C}) = P(\text{nessuna C}) + P(1\,\text{C}) =$$
$$= P(X = 3) + P(X = 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Esempio 12

Determinare la probabilità che in 5 lanci di un dado il numero 3 esca

a – 2 volte;
b – al più una volta;
c – almeno 2 volte.

La variabile aleatoria indica il numero di volte che esce 3.

$$n = 5 \qquad p = \frac{1}{6}$$

a – $$P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cong 0.1608$$

b – $$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=$$
$$=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0.8038$$

c – $$P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-P(X\le 1)=1-0.8038=0.1962$$

Esempio 13

Determinare la probabilità che in una famiglia con 4 figli ci sia

a – almeno un maschio;

b – almeno un maschio e una femmina.

c – Su 2000 famiglie con 4 figli ciascuna, quante famiglie hanno in media almeno un figlio maschio? E quante famiglie hanno in media due maschi?

Si supponga che le probabilità di nascita di un maschio e di una femmina siano uguali.

La variabile aleatoria X indica il numero dei maschi e p è la probabilità di nascita di un maschio.

$$n=4 \qquad p=0.5$$

a – $$P(X\ge 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}(0.5)^1(0.5)^3=\frac{1}{4} \qquad P(X=2)=\binom{4}{2}(0.5)^2(0.5)^2=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=\binom{4}{3}(0.5)^3(0.5)^1=\frac{1}{4} \qquad P(X=4)=\binom{4}{4}(0.5)^4(0.5)^0=\frac{1}{16}$$

$$P(X\ge 1)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

La probabilità $P(X\ge 1)$ può anche essere calcolata più brevemente come segue

$$P(X\ge 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}(0.5)^0(0.5)^4=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

b – P(almeno un M e una F) = 1–[P(nessun M)+P(nessuna F)]

$$P(\text{almeno un M e una F})=1-\left[P(X=0)+P(X=4)\right]=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=\frac{7}{8}$$

c – Ricordiamo i risultati trovati al punto a

$$P(X\ge 1)=\frac{15}{16} \qquad P(X=2)=\frac{3}{8}.$$

Il numero medio di famiglie con almeno un maschio è

$$N_1=2000\cdot\frac{15}{16}=1875$$

Il numero medio di famiglie con due maschi è

$$N_2=2000\cdot\frac{3}{8}=750$$

Esempio 14

Se il 5% dei chip di memoria prodotti da una macchina sono difettosi, determinare la probabilità che su 4 chip scelti a caso

a – 1 sia difettoso;

b – nessuno sia difettoso;

c – meno di 2 siano difettosi.

Calcolare la media e la deviazione standard del numero di chip difettosi su un totale di 400 chip.

La variabile aleatoria X indica il numero di chip difettosi.

$$n = 4 \qquad p = 0.05$$

a – $$P(X=1)=\binom{4}{1}(0.05)^1(0.95)^3=0.1715$$

b – $$P(X=0)=\binom{4}{0}(0.05)^0(0.95)^4=0.8145$$

c – $$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0.1715+0.8145=0.9860$$

d – $$n = 400 \qquad p = 0.05$$

$$\mu = np = 400 \cdot 0.05 = 20$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 400 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 19$$

$$\sigma = \sqrt{19} \cong 4.36$$

Esempio 15

Data una distribuzione binomiale con $n = 9$ e $\sigma = 0.9$, ricavare i possibili valori di p; per ciascun valore di p calcolare $P(X=4)$.

Per la proprietà 1, si ha

$$\sigma^2 = np(1-p) = 0.81 = \frac{81}{100}$$

$$9p(1-p)=\frac{81}{100}$$

$$100p^2-100p+9=0$$

I possibili valori di p sono

$$p=0.1 \qquad p=0.9\,.$$

Per $n = 9$ e $p = 0.1$ si ha

$$P(X=4)=\binom{9}{4}(0.1)^4(0.9)^5=0.007440$$

Per $n = 9$ e $p = 0.9$ si ha

$$P(X=4)=\binom{9}{4}(0.9)^4(0.1)^5=0.0008267$$

Esempio 16

La variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale ed è tale che

$$\frac{\sigma^2}{\mu}=0.3 \qquad \mu=10.5$$

Trovare i valori di n e p.

Per la proprietà 1 si ha

$$\sigma^2 = np(1-p) = 0.3\cdot 10.5 = 3.15$$

$$\mu = np = 10.5$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} np(1-p)=3.15 \\ np=10.5 \end{cases}$$

si trova

$$p=0.7 \qquad n=15\,.$$

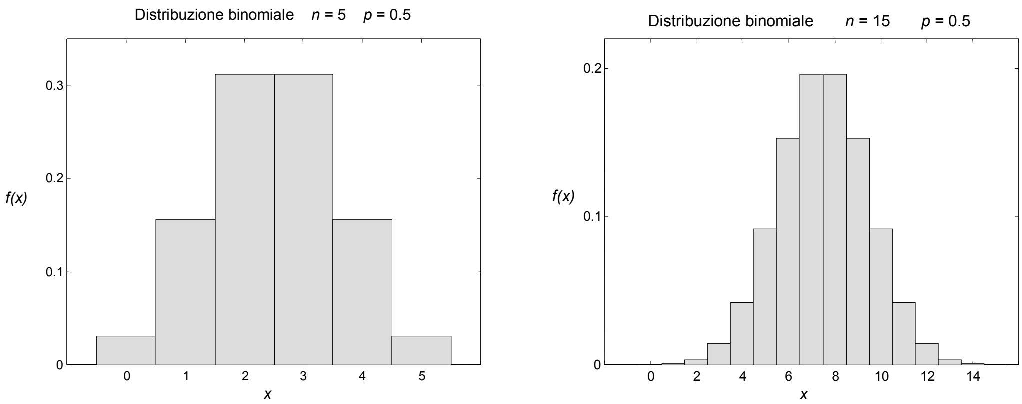

Figura 1

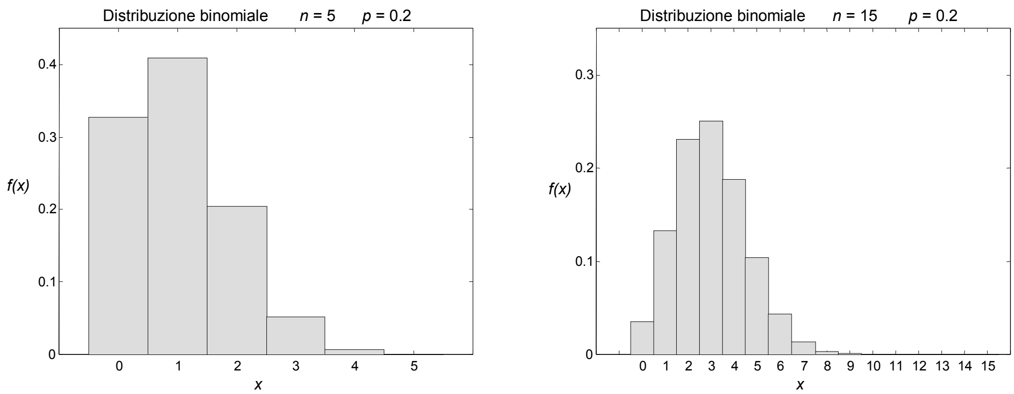

Figura 2

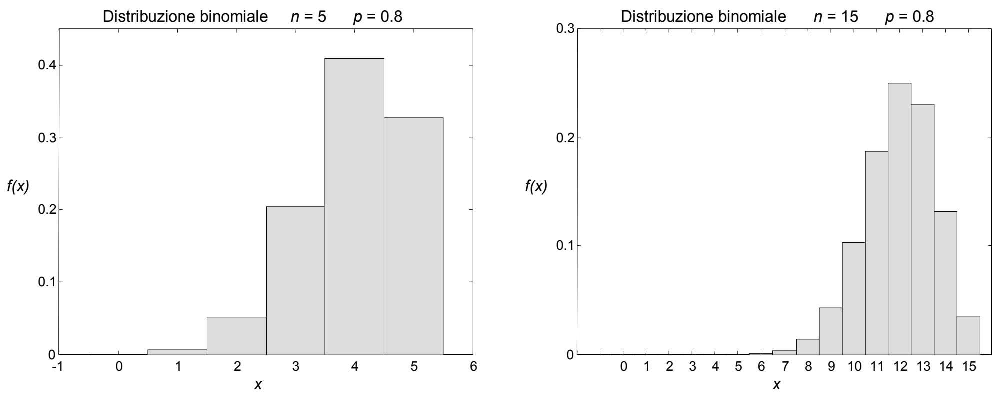

Figura 3

Esempio 21

Si effettuano 6 lanci di una moneta; studiare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria binomiale X = numero di teste T uscite nei 6 lanci.

Il successo è dato dall'uscita T e la probabilità di successo è $p = \dfrac{1}{2}$.

Calcoliamo con la formula della distribuzione binomiale la probabilità di ottenere 0 volte l'uscita T

$$P(X = 0) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0.015625 \cong 0.015625$$

Applicando la formula di ricorrenza (4.9) si calcolano gli altri valori delle probabilità.

$$P(X=1)=\frac{6}{1}\cdot\frac{0.5}{0.5}\cdot P(X=0)=6\cdot 0.015625=0.09375$$
$$P(X=2)=\frac{5}{2}\cdot 0.09375=0.2344$$
$$P(X=3)=\frac{4}{3}\cdot 0.2344=0.3125$$
$$P(X=4)=0.2344 \qquad P(X=5)=0.09375 \qquad P(X=6)=0.015625$$

Questi valori potrebbero essere cercati direttamente sulle tavole, dove compare sia il valore n = 6 che $p=\frac{1}{2}$.

Il grafico della distribuzione di probabilità è rappresentato dal seguente istogramma (figura 4); si noti la simmetria, dovuta al fatto che $p=\frac{1}{2}$. Data la simmetria, non è necessario ripetere il calcolo degli ultimi tre valori delle probabilità $P(X=4),\ P(X=5),\ P(X=6)$, che sono rispettivamente uguali a quelli già calcolati $P(X=2),\ P(X=1),\ P(X=0)$.

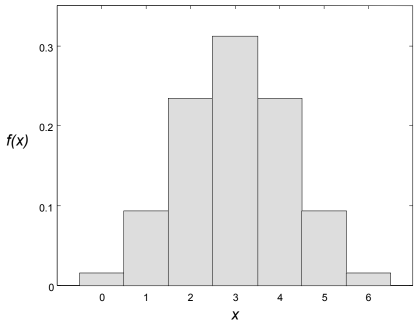

Figura 4

Esempio 22
Si effettuano 10 lanci di un dado.
a – Studiare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria binomiale X = numero di uscite del numero 3.
b – Studiare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria binomiale X = numero di uscite di un numero diverso da 3.

a – Il successo è dato dall'uscita del numero 3 e la probabilità di successo è $p=\frac{1}{6}$ (questo valore non compare sulle tavole).
Calcoliamo con la formula della distribuzione binomiale la probabilità di ottenere 0 volte l'uscita del numero 3, e ricaviamo gli altri valori delle probabilità con la formula di ricorrenza (4.9).

$$P(X=0)=\binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=0.1615$$
$$P(X=1)=10\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}0.1615=0.3230$$
$$P(X=2)=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot 0.3230=0.2907$$
$$P(X=3)=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot 0.2907=0.1550$$
$$P(X=4)=\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot 0.1550=0.05425$$

....

Il grafico della distribuzione di probabilità è rappresentato dal seguente istogramma; si noti l'asimmetria positiva del grafico, la distribuzione è obliqua verso destra.

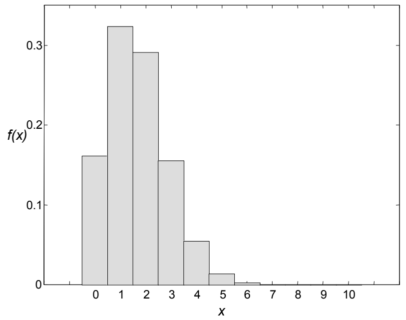

Figura 5

b – Le probabilità di ottenere un numero diverso da 3 si ricavano per simmetria dai valori ottenuti al punto a: infatti in questo caso il successo, l'uscita di un numero diverso da 3, coincide con l'insuccesso del caso precedente, l'uscita del numero 3; quindi si ha

$$
\begin{aligned}
&........\\
&P(X=6)=0.05425\\
&P(X=7)=0.1550\\
&P(X=8)=0.2907\\
&P(X=9)=0.3230\\
&P(X=10)=0.1615
\end{aligned}
$$

Il grafico della distribuzione di probabilità è rappresentato dal seguente istogramma; si noti l'asimmetria negativa del grafico, la distribuzione è obliqua verso sinistra.

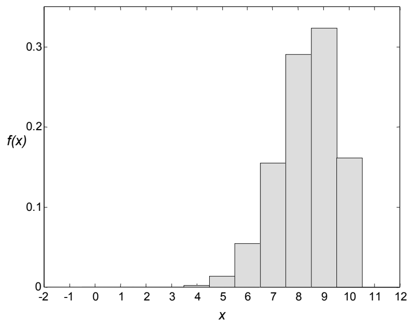

Figura 6

4.5 Distribuzione di Poisson

Vi sono fenomeni in cui determinati eventi, con riferimento a un certo intervallo di tempo o di spazio, accadono raramente: il numero di eventi che si verificano in quell'intervallo varia da 0 a n, e n non è determinabile a priori. Ad esempio, il numero di automobili che transitano in una strada poco frequentata in un intervallo di tempo di 5 minuti scelto a caso, può essere considerato un evento raro; analogamente sono eventi rari il numero di infortuni sul lavoro che accadono in una azienda in una settimana o il numero di errori di stampa presenti in una pagina di un libro.
Nello studio degli eventi rari, come quelli degli esempi citati, è fondamentale il riferimento a uno specifico intervallo di tempo o di spazio.
Per lo studio di eventi rari del tipo di quelli descritti si utilizza la **distribuzione di probabilità di Poisson**, così chiamata in onore del matematico francese Simeon Denis Poisson (1781-1840), che per primo ricavò la distribuzione; questa distribuzione è molto usata come modello di probabilità in

biologia e medicina. La distribuzione di Poisson è usata come modello nei casi in cui gli eventi o realizzazioni di un processo, distribuiti a caso nello spazio o nel tempo, sono dei conteggi, ovvero delle variabili discrete.
La distribuzione binomiale è basata su un insieme di ipotesi che definiscono le prove bernoulliane; lo stesso accade per la distribuzione di Poisson.
Le seguenti condizioni descrivono il così detto **processo di Poisson**:
1 – le realizzazioni degli eventi sono indipendenti: il verificarsi di un evento in un intervallo di tempo o di spazio non ha alcun effetto sulla probabilità di verificarsi dell'evento una seconda volta nello stesso, o in un altro, intervallo;
2 – la probabilità di una singola realizzazione dell'evento in un dato intervallo è proporzionale alla lunghezza dell'intervallo;
3 – in ogni parte arbitrariamente piccola dell'intervallo, la probabilità che l'evento si verifichi più di una volta è trascurabile.
Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte in cui si verifica un evento raro in un dato intervallo di tempo o di spazio, ossia il numero di successi; la variabile X può assumere i valori $x = 0,1,2,\dots$. Si dimostra il seguente risultato.

Teorema 2
La probabilità che la variabile aleatoria X assuma il valore x è data dalla **distribuzione di probabilità di Poisson**

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \text{per } x = 0,\ 1,\ 2,\ \dots \tag{4.10}$$

dove il parametro $\lambda > 0$ indica il numero medio di realizzazioni dell'evento nell'intervallo assegnato.

Una variabile aleatoria che ammette questa distribuzione è detta **variabile aleatoria di Poisson** con parametro λ.
La distribuzione di Poisson viene anche indicata con il simbolo $f(x;\lambda)$; la corrispondente **funzione di distribuzione di Poisson** è data da

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

e viene anche indicata con il simbolo $F(x;\lambda)$.
Si dimostra la seguente proprietà.

Proprietà 4
Il **valor medio** e la **varianza** della distribuzione di Poisson di parametro λ sono dati da

$$\mu = \lambda \qquad \sigma^2 = \lambda \tag{4.11}$$

Una importante differenza tra la distribuzione di Poisson e la binomiale riguarda i numeri di prove e di successi: per una distribuzione binomiale il numero n di prove è finito e il numero x di successi non può superare n; per una distribuzione di Poisson il numero di prove è essenzialmente infinito e il numero di successi può essere infinitamente grande, anche se la probabilità di avere x successi diventa molto piccola al crescere di x.
Per il calcolo della distribuzione di Poisson sono utili le relazioni elencate nella proprietà 2, valide anche per questa distribuzione discreta.
La distribuzione di Poisson ha molte applicazioni in vari ambiti diversi, perché può essere usata per approssimare una distribuzione binomiale di parametri n e p, quando il numero di prove n è grande e la probabilità di successo p è piccola, ossia si tratta di un evento raro.
Per dimostrare questo, indichiamo con X una variabile aleatoria avente distribuzione binomiale con parametri n e p, con n grande e p piccola, e sia $\lambda = np$; si ha

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!\,n^x}\lambda^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}\lambda^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

Per $n \to \infty$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = e^{-\lambda}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} b(x;n,p) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

ossia la distribuzione di Poisson è il limite per $n \to \infty$, e con $\lambda = np$, della distribuzione binomiale di parametri n e p.
Da questo segue che, quando il numero di prove n è grande e la probabilità di successo p è piccola, la distribuzione binomiale può essere approssimata con la distribuzione di Poisson avente media $\lambda = np$ (vedere § 4.9).

Esempio 23
Dalle statistiche degli ultimi 5 anni, un'azienda ha calcolato che ogni giorno sono assenti in media 1.8 operai. Calcolare la probabilità che in un giorno qualsiasi ci siano 3 operai assenti contemporaneamente.

Il numero medio di assenti giornalieri è piccolo, perciò si può usare la distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 1.8$; si trova

$$P(X=3) = \frac{e^{-1.8}(1.8)^3}{3!} = 0.1607$$

Esempio 24
Ad un servizio di guardia medica arrivano in media 3.5 richieste ogni ora di interventi urgenti a domicilio.
a – Calcolare la probabilità che in una stessa ora arrivino 3, 4, 5 chiamate urgenti.
b – Calcolare la probabilità che in una stessa ora arrivi un numero di chiamate compreso fra 3 e 5.
c – Calcolare la probabilità che in una stessa ora arrivi un numero di chiamate maggiore di 4.

a – Le probabilità possono essere calcolate con la distribuzione di Poisson, con parametro $\lambda = 3.5$; si ha

$$P(X=3) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^3}{3!} = 0.2158$$

$$P(X=4) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^4}{4!} = 0.1888$$

$$P(X=5) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^5}{5!} = 0.1322$$

b – $$P(3 \le X \le 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \\ = 0.2158 + 0.1888 + 0.1322 = 0.5368$$

c – $$P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = \\ = 1 - \left(e^{-3.5} + e^{-3.5} \cdot 3.5 + \frac{e^{-3.5}(3.5)^2}{2} + \frac{e^{-3.5}(3.5)^3}{3!} \right) = \\ = 1 - (0.03020 + 0.1057 + 0.1850 + 0.2158) = 0.4633$$

Esempio 25
Un libro di 500 pagine contiene 50 errori di stampa. Qual è la probabilità di trovare almeno 3 errori su una pagina aperta a caso?

Il numero medio di errori su una pagina è $\lambda = \frac{50}{500} = 0.1$; con la distribuzione di Poisson si ha

$$P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = \\ = 1 - \left(e^{-0.1} + 0.1 \cdot e^{-0.1} + \frac{0.1^2}{2} e^{-0.1} \right) = 1 - 0.99985 = 0.00015$$

4.6 Uso delle tavole della distribuzione di Poisson

Poiché la distribuzione di Poisson ha molte importanti applicazioni, sono disponibili delle tavole, riportate nell'Appendice A, che forniscono il valore della funzione di distribuzione

$$F(x;\lambda) = P(X \le x)$$

per vari valori di λ, variabili fra 0.02 e 25.
Per il calcolo della distribuzione di probabilità $f(x;\lambda)$ con l'uso delle tavole, è utile l'identità

$$f(x;\lambda) = F(x;\lambda) - F(x-1;\lambda)$$

(si ricordi la proprietà (4.8)).

Esempio 26
La variabile aleatoria X ha la distribuzione di probabilità di Poisson con valor medio λ = 2. Calcolare le probabilità

a – $P(4 < X < 7)$

b – $P(3 < X \le 7)$

c – $P(X > 3)$

d – $P(X = 5)$

Con l'uso delle tavole si ha

a – $P(4 < X < 7) = P(X \le 6) - P(X \le 4) = 0.9955 - 0.9473 = 0.0482$

b – $P(3 < X \le 7) = P(X \le 7) - P(X \le 3) = 0.9989 - 0.8571 = 0.1418$

c – $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - 0.8571 = 0.1429$

d – $P(X = 5) = P(X \le 5) - P(X \le 4) = 0.9834 - 0.9473 = 0.0361$

Esempio 27
Data la variabile aleatoria X avente distribuzione di Poisson, trovare il valor medio λ, sapendo che

a – $P(X \le 5) = 0.9896$

b – $P(X > 4) = 0.0527$.

5. *Distribuzioni di probabilità continue*

Fra le densità di probabilità continue, la più importante è la **densità di probabilità normale**, di solito detta semplicemente **distribuzione normale** o anche **distribuzione di Gauss**, in onore del matematico Carl Friedrich Gauss (1777-1855), che diede importanti contributi allo studio di questa distribuzione.
La distribuzione è anche nota come **legge degli errori**, in quanto essa descrive in particolare la distribuzione degli errori casuali relativi a successive misure di una quantità fisica (vedere § 5.3).
La distribuzione normale è importante in statistica per tre motivi fondamentali:
1 – diversi fenomeni continui seguono, almeno approssimativamente, una distribuzione normale;
2 – la distribuzione normale può essere utilizzata per approssimare numerose distribuzioni di probabilità discrete;
3 – la distribuzione normale è alla base dell'inferenza statistica, in virtù del teorema del limite centrale, che sarà discusso nel capitolo 6.

5.1 Distribuzione normale o di Gauss

Definizione 1
La **densità di probabilità normale**, o **distribuzione normale** o **di Gauss**, è definita dalla funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty \tag{5.1}$$

di parametri μ e σ , con $\sigma > 0$.

Si dimostra che μ e σ sono rispettivamente il valor medio e lo scarto quadratico medio della variabile aleatoria X distribuita secondo la distribuzione normale.
Le caratteristiche più importanti della distribuzione normale sono le seguenti.
La funzione $f(x)$ è definita su tutto l'asse reale e assume valori sempre positivi; è simmetrica rispetto alla retta $x = \mu$, cioè rispetto al valor medio della distribuzione. La moda e la mediana coincidono con il valor medio.
Il valore massimo della funzione viene assunto nel punto di ascissa μ ed è $y_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$; questo valore è perciò inversamente proporzionale a σ.
Lo scarto quadratico medio σ è uguale alla distanza dei punti di flesso da μ, ossia i punti di flesso hanno ascissa rispettivamente $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.
La distribuzione normale ha una forma a campana, il grafico di $f(x)$ è del tipo illustrato nella figura 1.

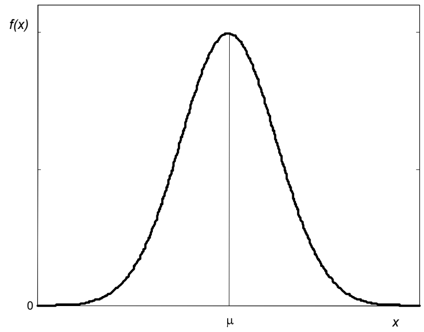

Figura 1

Poiché la curva rappresenta l'andamento della funzione di densità di una variabile aleatoria, il valore di tutta l'area sottesa da tale curva è uguale a 1.

La distribuzione normale è completamente individuata dai parametri μ e σ, ossia in corrispondenza di ogni valore di μ e σ rimane specificata una diversa curva normale appartenente alla famiglia rappresentata dall'equazione (5.1).
Nella figura 2 si riportano i grafici della distribuzione normale per un dato valore di μ e per diversi valori di σ: a parità di valor medio le variazioni della forma caratteristica a campana della curva dipendono essenzialmente dal valore dello scarto quadratico medio, che dà informazioni su come i valori sono più o meno concentrati intorno alla media: infatti facendo variare σ si ottengono curve più o meno appiattite (vedere anche l'esempio 5 e la figura 14).
Nella figura 3 si riportano invece i grafici della distribuzione normale per un dato valore di σ e per diversi valori di μ: in questo caso le variazioni del valore di μ comportano solo una traslazione della curva.

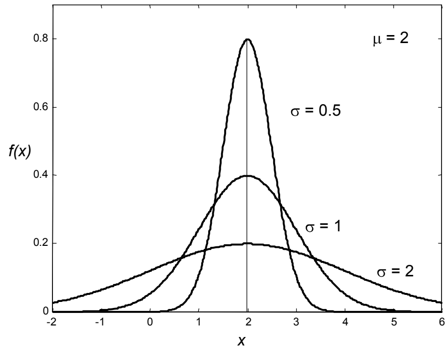

Figura 2

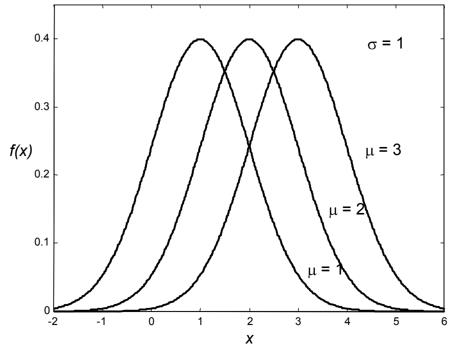

Figura 3

La **funzione di distribuzione** o **funzione di ripartizione normale** è data da

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \qquad -\infty < x < \infty \qquad (5.2)$$

Nella figura 4 si riporta il grafico della funzione di distribuzione $F(x)$ per $\mu = 2$ e $\sigma = 1$

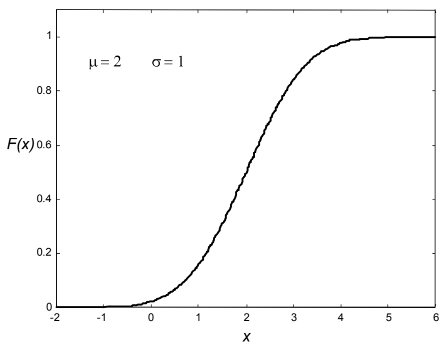

Figura 4

5.2 Distribuzione normale standardizzata

Come già osservato, la distribuzione normale è una famiglia di distribuzioni in cui ogni membro è distinto dall'altro in base ai valori di μ e σ. La curva più importante della famiglia è la **distribuzione normale standardizzata**. Per ricavare questa distribuzione, data la variabile aleatoria X distribuita normalmente con media μ e varianza σ^2, si passa alla nuova variabile aleatoria Z, detta **variabile standardizzata**, ponendo

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} .$$

La trasformazione operata fa in modo che la media di Z sia 0 e la varianza 1.

La **distribuzione di probabilità della variabile normale standardizzata** Z è data da

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < z < \infty \tag{5.3}$$

La **funzione di distribuzione** o **di ripartizione della variabile normale standardizzata** Z è data da

$$F(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad -\infty < z < \infty \tag{5.4}$$

I grafici della distribuzione normale standardizzata $f(z)$ e della relativa funzione di distribuzione $F(z)$ sono riportati nelle figure 5 e 6.

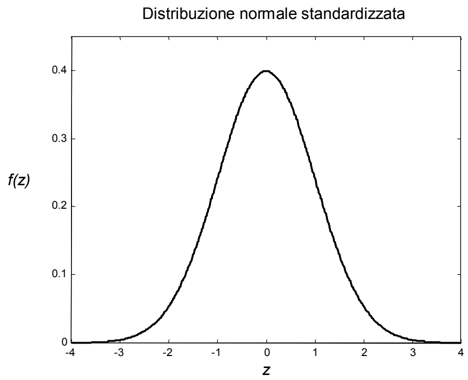

Figura 5

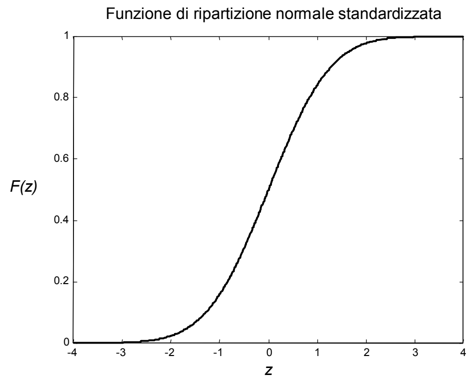

Figura 6

Nei grafici della figura 7, riproducenti la distribuzione normale standardizzata, indichiamo le aree comprese[1] rispettivamente tra -1 e 1, tra -2 e 2 e tra -3 e 3, pari al 68.27%, al 95.44% e al 99.73% dell'area totale, che è 1. Questo significa che

$$P(-1 < Z < 1) = 0.6827 \cong 68.3\%$$

$$P(-2 < Z < 2) = 0.9544 \cong 95.4\%$$

$$P(-3 < Z < 3) = 0.9973 \cong 99.7\%$$

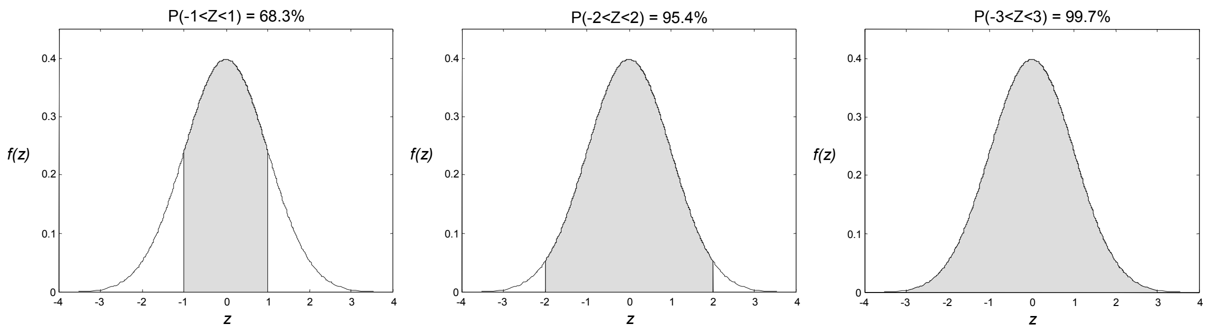

Figura 7

[1] Si ricordi l'osservazione 2, pag. 102: per le variabili aleatorie continue usare il segno $<$ o il segno $\le$ è indifferente.

Tenendo conto che per la variabile normale standardizzata lo scarto quadratico medio è uguale a 1, dal primo grafico della figura 7 si deduce sostanzialmente che una variabile aleatoria distribuita normalmente ha probabilità del 68.3% di discostarsi dalla media per meno di σ; analogamente dal secondo e dal terzo grafico si deduce che una variabile aleatoria normale ha probabilità del 95.4% di discostarsi dalla media per meno di 2σ e del 99.7% per meno di 3σ, cioè è quasi impossibile che si discosti dalla media per più di 3σ

$$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \cong 68.3\%$$
$$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \cong 95.4\%$$
$$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \cong 99.7\%$$

5.3 Alcune applicazioni della distribuzione normale

Dopo aver introdotto da un punto di vista matematico la distribuzione normale e le sue proprietà elementari, illustriamo alcuni esempi nei quali la distribuzione normale viene utilizzata come modello probabilistico.

1 – Curva degli errori casuali nella misurazione di una grandezza fisica.
La misura, affetta da errore, di una qualunque grandezza fisica può essere vista come la somma del valore esatto della grandezza (che sarà un numero, costante) e dell'errore di misurazione, che è una variabile aleatoria, in quanto misure diverse forniscono in generale valori diversi.
La variabile aleatoria X = "errore di misurazione" ha come tipica densità di probabilità una curva a campana: l'errore può essere per eccesso o per difetto, perciò X può assumere valori positivi o negativi, in modo simmetrico; l'errore sarà in genere abbastanza piccolo, quindi la curva sarà rapidamente decrescente. Il fatto che, tra le infinite curve con questa proprietà, la normale rappresenti bene questo tipo di errori fu messo in evidenza da Gauss.
Se gli errori hanno media nulla, si dice che c'è solo **errore casuale**. Più grande è σ, maggiore sarà l'**inaccuratezza** della misura. Se poi il valor medio μ non è nullo, si dice che siamo anche in presenza di un **errore sistematico** μ che si somma all'errore casuale. Più grande è $|\mu|$, maggiore è l'**imprecisione** della misura. Si osservi che l'errore sistematico è una costante, mentre l'errore casuale è una variabile aleatoria.

2 – Distribuzione di una caratteristica quantitativa di una popolazione, che presenta oscillazioni casuali attorno a una media.
Molte grandezze antropometriche, come la statura, il peso, ecc., all'interno di una popolazione omogenea (ad esempio adulti, maschi, femmine, …) sono rappresentabili da una distribuzione gaussiana. Il valor medio μ della distribuzione è il valor medio della grandezza nella popolazione in esame; la varianza σ^2 è ragionevolmente piccola, se la popolazione è stata scelta in modo omogeneo. Anche altre misure di tipo fisiologico e biologico hanno un comportamento del tipo qui descritto.

3 – Dimensione effettiva di oggetti prodotti in serie, che si cerca di produrre in modo identico.
Ad esempio una ditta produce confezioni di biscotti che devono avere il peso di 250 g; il peso effettivo può essere rappresentato da una variabile aleatoria normale di valor medio μ = 250g e varianza più piccola possibile.
I tre tipi di esempi discussi sono simili, ma non uguali. Nel primo caso la variabilità è nelle misure che si fanno di una grandezza fissata una volta per tutte, ad esempio la massa di un oggetto che viene pesato tante volte; nel secondo caso la variabilità è tra individui diversi presenti in natura, ad esempio il peso di persone diverse; nel terzo caso la variabilità è tra oggetti diversi che vengono prodotti con l'intento di ottenerli uguali (per esempio il peso delle scatole di biscotti).
In tutti i casi si interpreta la variabilità della grandezza, vedendo il valore della variabile aleatoria X come il risultato di vari piccoli contributi; ad esempio l'errore nel misurare una lunghezza è dovuto al concorso di varie cause: inaccuratezza di chi esegue la misura, piccole variazioni della lunghezza dell'oggetto o dello strumento di misura, dovute a variazioni di temperatura, e così via.

Effettuando con un software statistico il calcolo delle probabilità con la distribuzione di Poisson, si trova il valore

$$P(X \le 39) = 0.0646 \ .$$

Esempio 23

Il numero di incidenti d'auto che si verificano in un giorno ad un incrocio è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson e media 1.4; calcolare la probabilità che accadano più di 50 incidenti in un periodo di 4 settimane.

Il numero di incidenti che si verificano in 28 giorni è una variabile X con media $\lambda = 1.4 \cdot 28 = 39.2$.
Si ha

$$P(X > 50) = 1 - P(X \le 50)$$

$$Z = \frac{50.5 - 39.2}{\sqrt{39.2}} \cong 1.80$$

$$P(X > 50) \cong 1 - P(Z < 1.80) = 1 - 0.9645 = 0.0355$$

5.7 Distribuzione uniforme

La distribuzione studiata nell'esempio 9, pag. 96 fornisce un esempio di una distribuzione discreta, detta **distribuzione uniforme discreta**.
La distribuzione uniforme che viene introdotta con la definizione seguente è l'analoga nel caso continuo della distribuzione uniforme discreta.

Definizione 2

Dati due numeri reali a e b , con $a < b$, si dice che la variabile aleatoria X ha **distribuzione uniforme** con parametri a e b, se la sua densità di probabilità è

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{5.13}$$

La **funzione di distribuzione uniforme** ha la seguente espressione

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases} \tag{5.14}$$

Come esempio, si riportano nella figura 23 i grafici di $f(x)$ e $F(x)$ nel caso $a = 2$, $b = 4$.

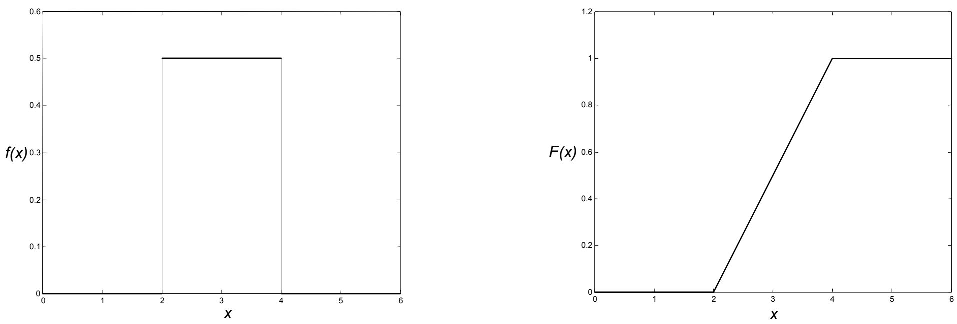

Figura 23

Proprietà 2
Il **valor medio** e la **varianza** della distribuzione uniforme continua sono dati da

$$\mu = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{5.15}$$

Infatti si ha

$$\mu = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \mu^2 = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Esempio 24
Una variabile aleatoria X è distribuita uniformemente nell'intervallo (0,100).
a – Calcolare la probabilità $P(20 < X < 60)$;
b – calcolare la media μ e la varianza σ^2 e trovare la probabilità $P(|X - \mu| < \sigma)$.

La variabile X ha la distribuzione uniforme (figura 24)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} & 0 < x < 100 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

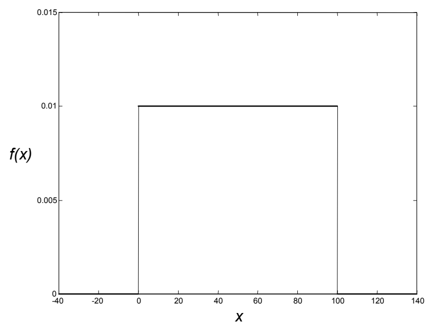

Figura 24

La funzione di distribuzione è (figura 25)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x}{100} & 0 < x < 100 \\ 1 & x \ge 100 \end{cases}$$

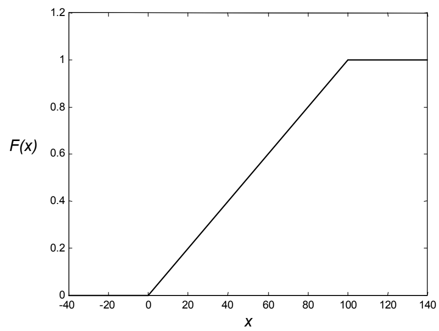

Figura 25

a – $$P(20 < X < 60) = F(60) - F(20) = \frac{60}{100} - \frac{20}{100} = 0.4$$

b – $$\mu = 50$$

$$\sigma^2 = \frac{100^2}{12} \qquad \sigma = \frac{100}{\sqrt{12}} = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$P\left(|X - 50| < \frac{50}{\sqrt{3}} \right) = P\left(50 - \frac{50}{\sqrt{3}} < X < 50 + \frac{50}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= F\left(50 - \frac{50}{\sqrt{3}} \right) - F\left(50 + \frac{50}{\sqrt{3}} \right) = \frac{50 + \frac{50}{\sqrt{3}}}{100} - \frac{50 - \frac{50}{\sqrt{3}}}{100} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.577$$

Esempio 25

In certi esperimenti l'errore commesso nella determinazione della solubilità di una sostanza è una variabile aleatoria X avente distribuzione uniforme con $a = -0.025$ e $b = 0.025$.

Trovare la probabilità che l'errore

a – sia compreso fra 0.010 e 0.015;

b – sia compreso fra -0.012 e 0.012.

a – La variabile X ha la seguente distribuzione uniforme (figura 26)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{0.05} = 20 & -0.025 < x < 0.025 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

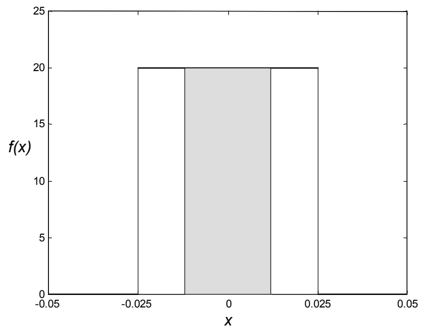

Figura 26

La funzione di distribuzione è la seguente

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0.025 \\ \frac{x + 0.025}{0.05} & 0.025 < x < 0.025 \\ 1 & x \ge 0.025 \end{cases}$$

$$P(0.010 < X < 0.015) = F(0.015) - F(0.010) =$$

$$= \frac{0.015 + 0.025}{0.05} - \frac{0.010 + 0.025}{0.05} = 0.1$$

$$P(-0.12 < X < 0.012) = F(0.012) - F(-0.012) =$$

$$= \frac{0.012 + 0.025}{0.05} - \frac{-0.012 + 0.025}{0.05} = 0.48$$

Questi risultati possono anche essere ottenuti per via geometrica; ad esempio la probabilità $P(-0.012 < X < 0.012)$ può essere ottenuta calcolando l'area del rettangolo ombreggiato nella figura 26.

Esempio 26

La variabile aleatoria X è distribuita uniformemente nell'intervallo (a,b); sapendo che $P(X<3)=\frac{1}{4}$ e $P(X<7)=\frac{3}{4}$, calcolare a e b.

La distribuzione uniforme della variabile X è la seguente (figura 27)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

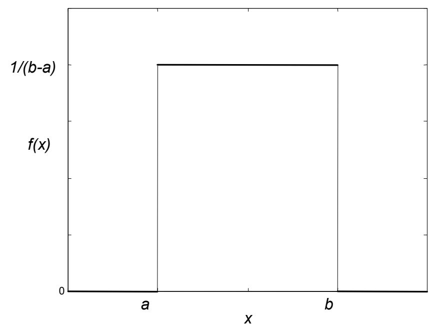

Figura 27

Dai valori delle probabilità assegnate si deduce subito che deve essere $a<3$ e $b>7$.
La probabilità $P(X<3)$ è uguale all'area del rettangolo di base $3-a$ e altezza $\frac{1}{b-a}$; analogamente la probabilità $P(X<7)$ è uguale all'area del rettangolo di base $7-a$ e altezza $\frac{1}{b-a}$; si ottiene il sistema

$$\begin{cases}(3-a)\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1}{4}\\ (7-a)\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ricava

$$a=1 \qquad b=9$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8} & 1<x<9\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$